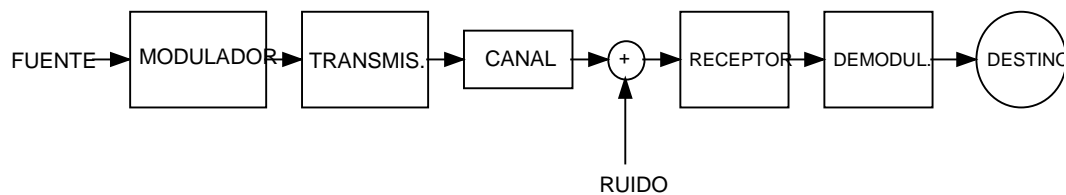


**TEMA VII.- MODULACIONES LINEALES**

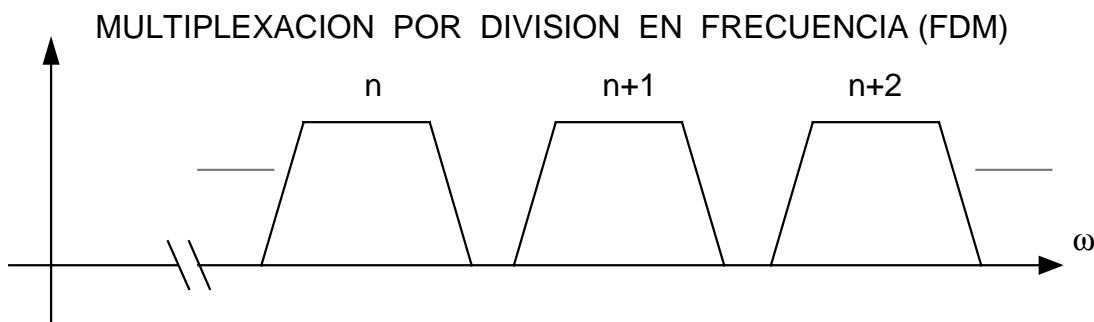
<b>VII.1.- INTRODUCCION A LOS SISTEMAS DE MODULACION</b>	<b>1</b>
<b>VII.2.- MODULACIONES LINEALES</b>	<b>2</b>
<b>VII.2.1.- AMPLITUD MODULADA (AM)</b>	<b>2</b>
VII.2.1.1.- ANCHO DE BANDA	4
VII.2.1.2.- POTENCIA TRANSMITIDA	5
VII.2.1.3.- GENERACION DE AMPLITUD MODULADA	6
<b>VII.2.1.3.1. MODULACION MEDIANTE DISPOSITIVOS NO LINEALES</b>	<b>8</b>
<b>VII.2.1.3.2.- MODULACION POR CONMUTACION O "CHOPPER"</b>	<b>9</b>
VII.2.1.4.- DEMODULACION DE AMPLITUD MODULADA	12
<b>VII.2.1.4.1.-DETECTOR DE ENVOLVENTE DE PICO</b>	<b>12</b>
<b>VII.2.1.4.2.- DETECTOR DE ENVOLVENTE PROMEDIO</b>	<b>17</b>
<b>VII.2.2.- MODULACION DOBLE BANDA LATERAL (DBL) (PORTADORA SUPRIMIDA)</b>	<b>19</b>
VII.2.2.1.- GENERACION DE DOBLE BANDA LATERAL	21
VII.2.2.2.- DETECCION COHERENTE DE DBL	23
<b>VII.2.2.2.1.- SINCRONIZACION DE PORTADORA</b>	<b>25</b>
<b>VII.2.2.2.2.- INCORPORACION DE PORTADORA</b>	<b>25</b>
<b>VII.2.2.2.3.- GENERACION DE PORTADORA MEDIANTE LAZO CUADRATICO</b>	<b>25</b>
<b>VII.2.3.- MODULACION BANDA LATERAL UNICA (BLU)</b>	<b>26</b>
VII.2.3.1.- GENERACION DE BANDA LATERAL UNICA	28
<b>VII.2.3.1.1.- DISCRIMINACION EN FRECUENCIA O FILTRADO</b>	<b>28</b>
<b>VII.2.3.1.2.- DISCRIMINACION EN FRECUENCIA EN DOBLE ETAPA</b>	<b>29</b>
<b>VII.2.3.1.3.- MODULACION POR DISCRIMINACION DE FASE</b>	<b>30</b>
<b>VII.2.3.1.4.- MODULADOR DE WEABER</b>	<b>31</b>
VII.2.3.2.- DEMODULACION DE SEÑALES BLU	32
<b>VII.2.4.- BANDA LATERAL RESIDUAL O VESTIGIAL (BLV)</b>	<b>34</b>
VII.2.4.1.- EXPRESION DE LA SEÑAL MODULADA EN EL DOMINIO DEL TIEMPO	39
VII.2.4.2.- MODULACION BLV CON PORTADORA	41
<b>VII.3.- RUIDO EN MODULACIONES LINEALES</b>	<b>41</b>
<b>VII.3.1.- RUIDO EN DOBLE BANDA LATERAL</b>	<b>41</b>
<b>VII.3.2.- RUIDO EN BANDA LATERAL UNICA</b>	<b>43</b>



**VII.1.- INTRODUCCION A LOS SISTEMAS DE MODULACION**

El sistema de modulación adapta la señal mensaje, procedente de la fuente, al canal de comunicaciones. De manera general, el modulador traslada el espectro paso bajo de la señal mensaje a una banda de frecuencias conveniente para su transmisión vía ondas radio y otros medios de transmisión como guiondas, fibras ópticas, etc.

La translación de frecuencias puede hacerse también para un mejor aprovechamiento del canal, transmitiendo simultáneamente varios mensajes por el mismo canal (multiplexación por división en frecuencia), dispuestos los espectros adecuadamente.



El espectro paso banda, resultado de la modulación, estará centrado en una frecuencia, generalmente alta, denominada frecuencia portadora. Esta portadora es simplemente una señal de la forma  $A \cos \omega_c t$ . Hay varios esquemas de modulación dependiendo de qué características de la señal portadora son variadas por la señal de información (moduladora).

- **Modulaciones de amplitud o lineales**

La señal moduladora varía las características de amplitud de la portadora, mientras que la fase de ésta es independiente de la señal moduladora.

## - **Modulaciones angulares**

La moduladora modifica las características de fase de la portadora, permaneciendo la amplitud constante.

### VII.2.- MODULACIONES LINEALES

#### **VII.2.1.- AMPLITUD MODULADA (AM)**

Se emplea fundamentalmente en radio difusión de onda media con frecuencias de portadora comprendidas en la banda

$$535 \text{ kHz} \leq f_c \leq 1.605 \text{ kHz}$$

La características esencial de AM es que preserva la envolvente de la portadora que, como se verá, no es más que la señal mensaje o moduladora.

Sea  $x(t)$  la señal moduladora cuyo espectro es paso bajo y en la que supondremos que

$$|x(t)| \leq 1 \quad \forall t$$

La señal modulada en AM tiene la expresión

$$s(t) = A_c [1 + mx(t)] \cos(\omega_c t + \theta_c)$$

siendo  $A_c$ ,  $\omega_c$  y  $\theta_c$  constantes

$A_c$                     amplitud de la portadora sin modular

$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$             frecuencia portadora

$\theta_c$                     fase constante de la portadora

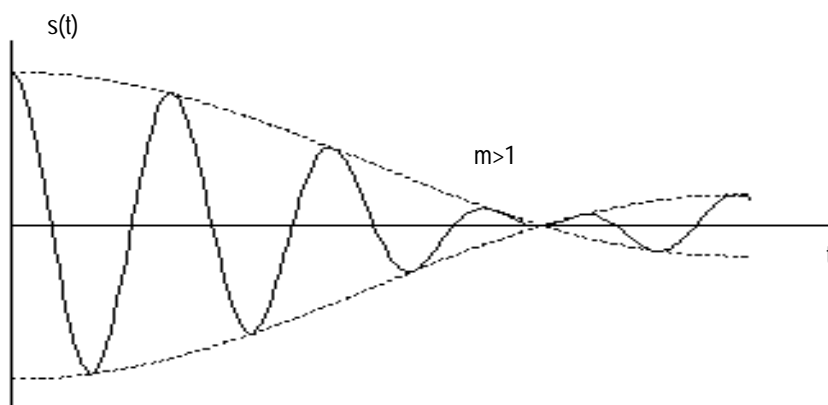
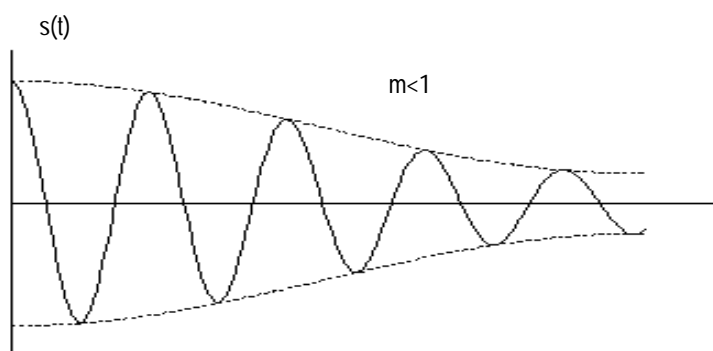
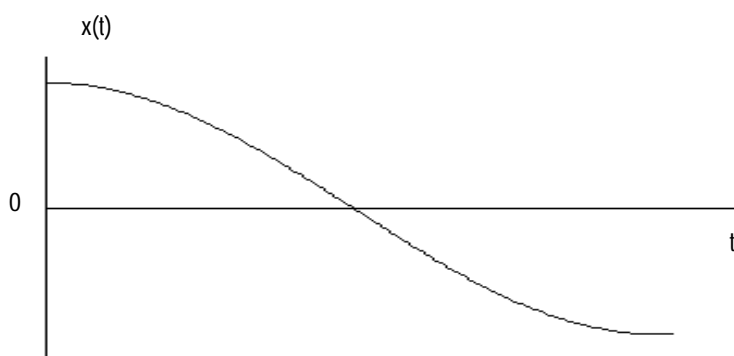
$m$  es el denominado índice de modulación y debe verificar la restricción

$$m \leq 1$$

Esta condición junto con la expresada anteriormente para la señal moduladora asegura que el término  $A_c[1 + mx(t)]$  es siempre positivo y expresa exactamente la envolvente de la señal modulada.

Si  $m$  fuese mayor que la unidad, la portadora podría estar sobremodulada ( $mx(t) < -1$ ), dando como resultado inversiones de fase. En este caso la onda modulada presentaría distorsiones de envolvente y la señal mensaje no podría recuperarse a partir de la envolvente de la señal modulada.

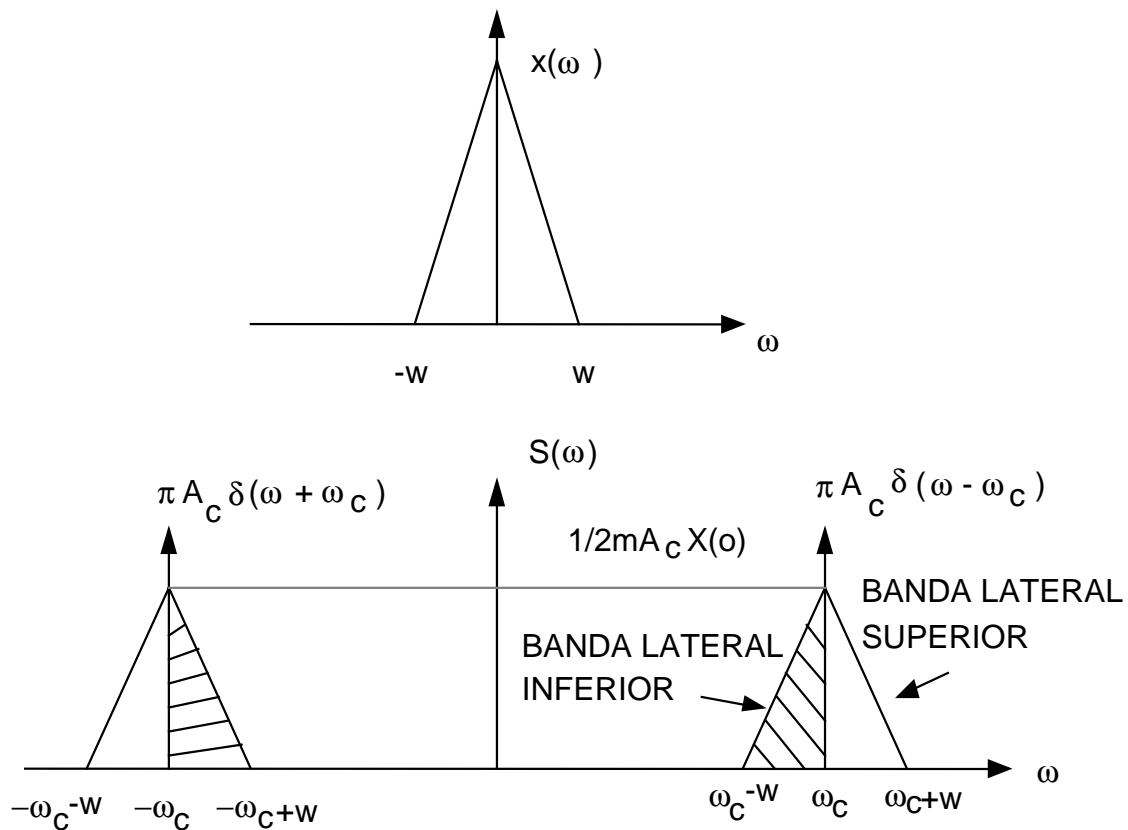
En las figuras siguientes pueden observarse estos efectos



## VII.2.1.1.- ANCHO DE BANDA

La transformada de Fourier de la señal modulada es, suponiendo  $\theta_c = 0$

$$S(\omega) = \pi A_c [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] + \frac{mA_c}{2} [X(\omega - \omega_c) + X(\omega + \omega_c)]$$



Así pues, el espectro no es más que el mensaje trasladado a la frecuencia portadora  $\pm\omega_c$  más un par de impulsos que representan a la portadora. Tiene por tanto simetría alrededor de la frecuencia portadora (amplitud simetría par y fase simetría impar). A la parte del espectro por encima de la portadora se llama banda lateral superior y a la que está por debajo, banda lateral inferior.

El ancho de banda de transmisión es el doble del ancho de banda de la señal mensaje

$$B_T = 2B$$

$$B = \frac{W}{2\pi}$$

esto representa un mal uso del espectro.

### VII.2.1.2.- POTENCIA TRANSMITIDA

Para calcular la potencia transmitida supondremos que la señal moduladora es una señal aleatoria (proceso) y que la fase de la portadora  $\theta_c$  es una variable aleatoria distribuida uniformemente en  $[-\pi, \pi]$  e independiente de la moduladora. De esta forma

$$P_T = E \{ s^2(t) \} = \overline{s^2(t)}$$

donde la barra puede significar que el proceso es ergódico en correlación (promedio temporal) o simplemente una simplificación de la otra notación.

Sustituyendo quedará

$$\begin{aligned} P_T &= \frac{1}{2} A_c^2 \overline{[1+m x(t)]^2} = \\ &= \frac{A_c^2}{2} [1 + 2m \overline{x(t)} + m^2 \overline{x^2(t)}] \end{aligned}$$

Si suponemos además que la señal tiene media nula (no tiene componente continua)  $\overline{x(t)} = 0$

$$P_T = [1 + m^2 \overline{x^2(t)}] \frac{A_c^2}{2}$$

Que tiene la siguiente interpretación

$$P_T = P_c + 2P_{SB}$$

siendo  $P_c$  la potencia de portadora

$$P_C = \frac{1}{2} A_C^2$$

y  $P_{SB}$  la potencia de una banda lateral

$$P_{SB} = \frac{A_C^2}{4} \overline{m^2 x^2(t)}$$

Obsérvese que

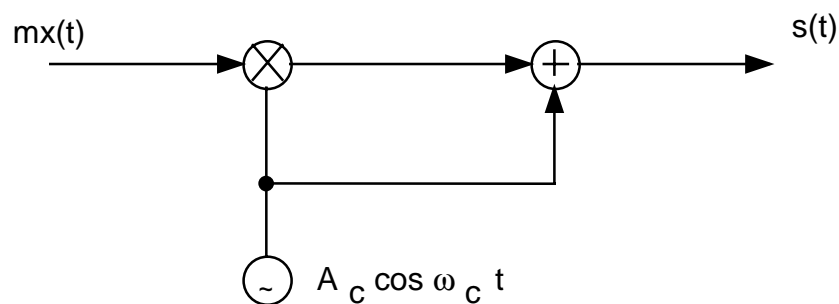
$$P_{SB} = \frac{\overline{m^2 x^2(t)} P_C}{2} \leq \frac{1}{2} P_C \quad \text{si} \quad m < 1$$

Por tanto, la portadora tiene al menos el 50% de la potencia transmitida. La portadora es independiente del mensaje, no contiene ninguna información y por consiguiente la modulación AM representa una mala utilización de la potencia. No obstante, como se verá, el exceso de potencia transmitida facilitará la demodulación, es decir, la detección del mensaje.

### VII.2.1.3.- GENERACION DE AMPLITUD MODULADA

El dispositivo generador de ondas AM debe ser variante con el tiempo o no lineal ya que en la señal modulada se crean nuevas frecuencias que no pueden ser generadas por un sistema lineal e invariante.

La forma general de obtener AM está indicada en la figura.

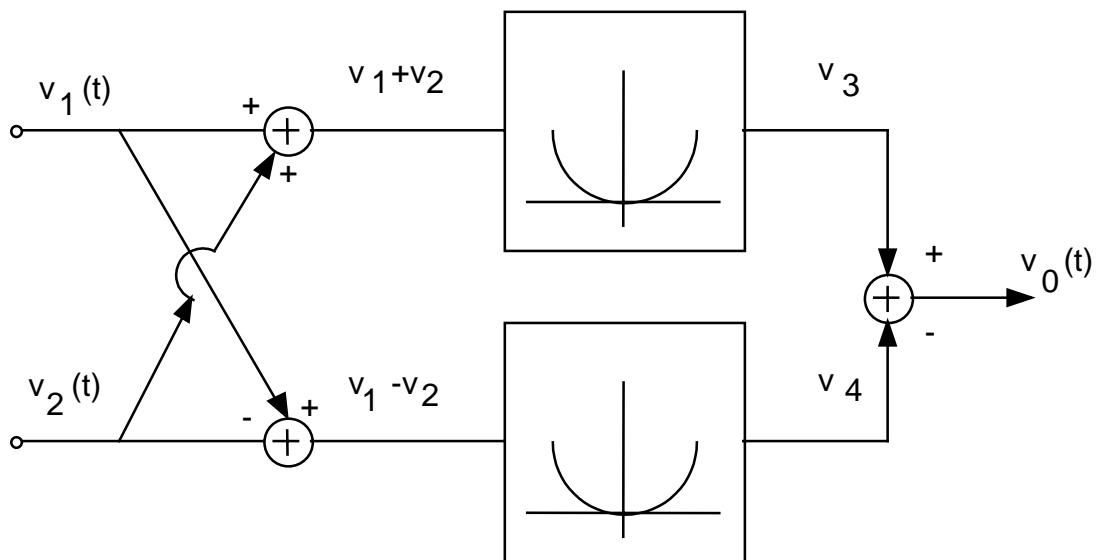




Un multiplicador puede ser realizado por medio de dos dispositivos de ley cuadrática como en la figura, con características de entrada-salida de la forma

$$v_o(t) = av_i^2(t)$$

siendo  $v_o(t)$  la señal de salida y  $v_i(t)$  la de entrada



La salida del dispositivo superior es

$$v_3(t) = a(v_1^2 + 2v_1 v_2 + v_2^2)$$

la del inferior

$$v_4(t) = a(v_1^2 - 2v_1 v_2 + v_2^2)$$

Por tanto la salida del sistema viene dada por

$$v_o(t) = 4a v_1(t) v_2(t)$$

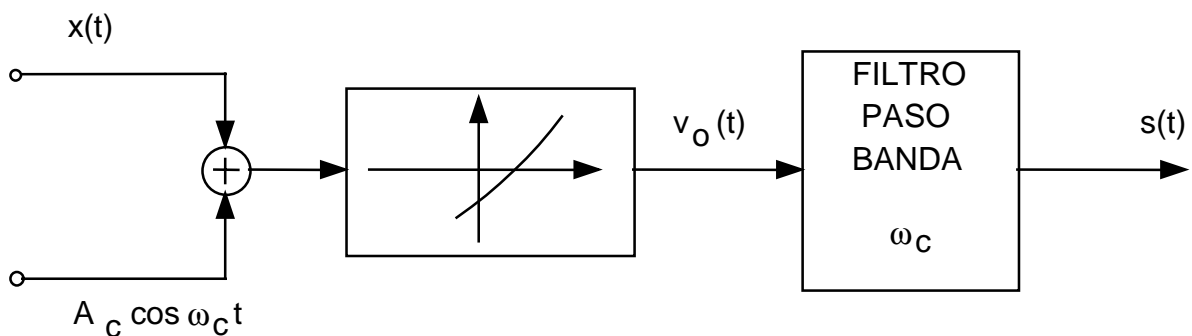
### VII.2.1.3.1. MODULACION MEDIANTE DISPOSITIVOS NO LINEALES

En estos sistemas, la modulación se logra aplicando la suma de la portadora y moduladora a un dispositivo no lineal y posterior filtrado paso banda. La no-linealidad de estos dispositivos no debe ser superior al segundo orden.

En la figura siguiente puede verse el esquema general de este tipo de modulador. Considerando la característica entrada-salida del dispositivo de la forma general

$$v_o(t) = \sum_{n=0}^N a_n v^n(t)$$

La salida del dispositivo hasta el término de tercer orden será



$$\begin{aligned}
 v_o(t) = & a_0 + \frac{a_2}{2} A_c^2 + a_1 x(t) + \frac{3}{2} a_3 A_c^2 x(t) + a_2 x^2(t) + a_3 x^3(t) \\
 & + [a_1 A_c + 2a_2 A_c x(t) + 3a_3 A_c x^2(t) + \frac{3}{4} a_3 A_c^3] \cos \omega_c t \\
 & + \left[ \frac{1}{2} a_2 A_c^2 + \frac{3}{2} a_3 A_c^2 x(t) \right] \cos 2\omega_c t \\
 & + \frac{1}{4} a_3 A_c^3 \cos 3\omega_c t
 \end{aligned}$$

donde se ha hecho uso de las relaciones

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^3 \alpha = \frac{\cos 3\alpha + 3\cos \alpha}{4}$$

Aunque el filtro elimine los términos de baja frecuencia y los centrados en los armónicos  $2\omega_C$  y  $3\omega_C$ , la salida final no será AM debido al término  $3a_3 A_C x^2(t)$  por lo que la no-linealidad debe estar limitada a orden dos ( $a_3 = 0$ ). De esta forma la salida será

$$s(t) = A_C a_1 \left[ 1 + \frac{2a_2}{a_1} x(t) \right] \cos \omega_C t$$

se ha de verificar que

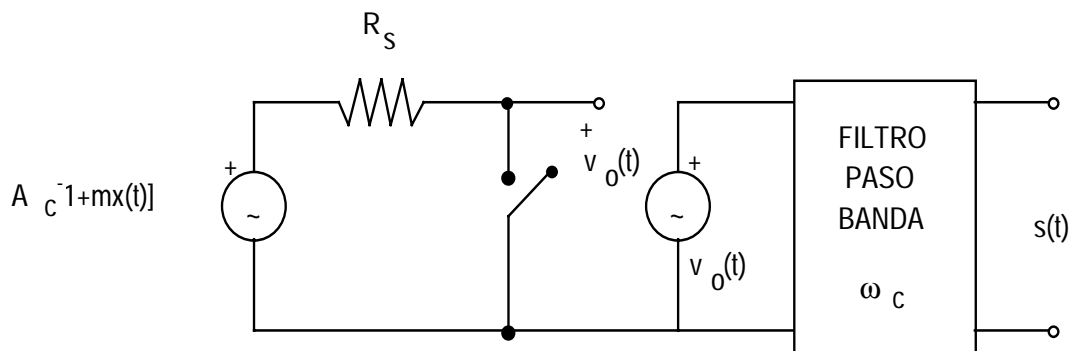
$$\omega_C > 3\omega$$

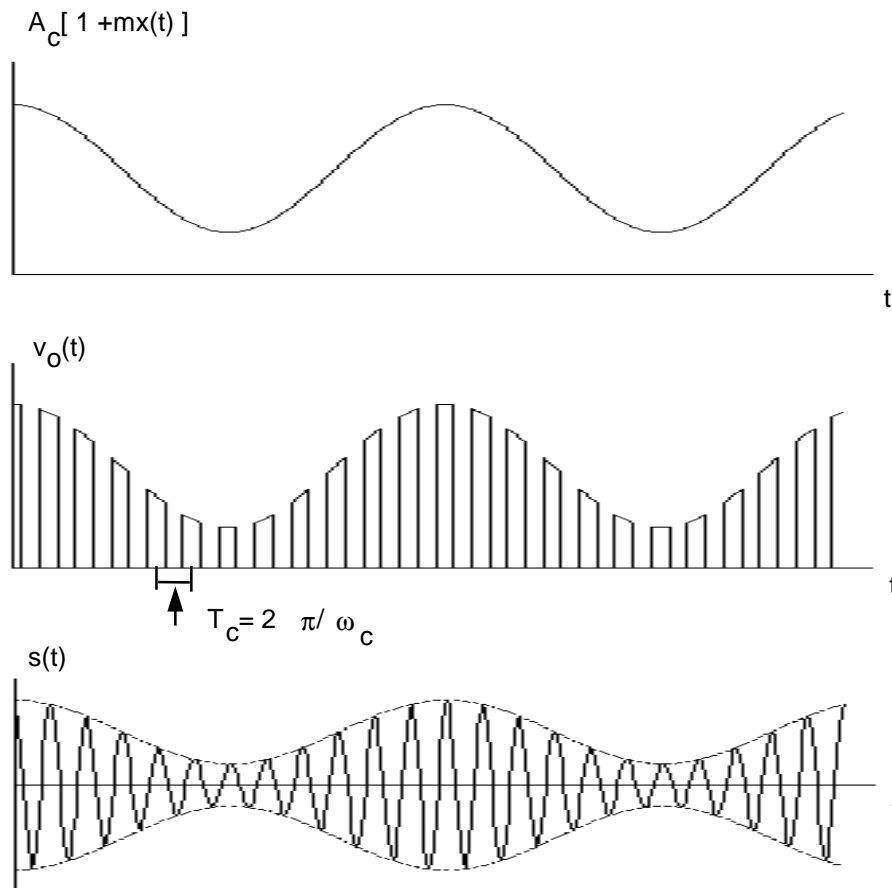
para que no haya solapamiento del espectro de  $s(t)$  con el de  $x^2(t)$ .

### VII.2.1.3.2.- MODULACION POR CONMUTACION O "CHOPPER"

Esta modulación se realiza mediante "chopping" de la señal  $A_C[1+mx(t)]$  a la frecuencia portadora y posterior filtrado paso banda.

En las figuras siguientes se tiene el esquema básico y las señales resultantes





Si el conmutador permanece abierto en los ciclos positivos de portadora, la señal  $v_O(t)$  será

$$v_O(t) = A_C [1 + mx(t)] s_C(t)$$

donde

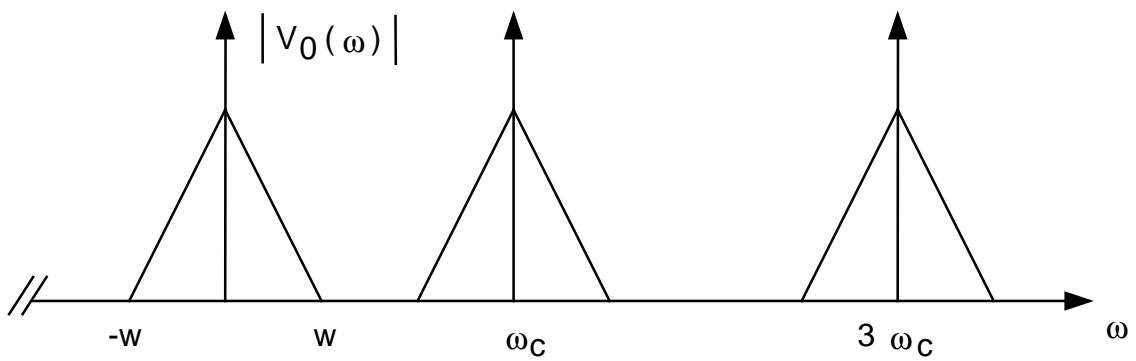
$$s_C(t) = \begin{cases} 1 & \cos \omega_C t \geq 0 \\ 0 & \cos \omega_C t < 0 \end{cases}$$

Desarrollando  $s_C(t)$  en serie de Fourier

$$s_C(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos \omega_C t - \frac{2}{3\pi} \cos 3\omega_C t + \dots$$

se tiene que

$$v_O(t) = A_C [1 + mx(t)] \left( \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos \omega_C t - \frac{2}{3\pi} \cos 3\omega_C t + \dots \right)$$

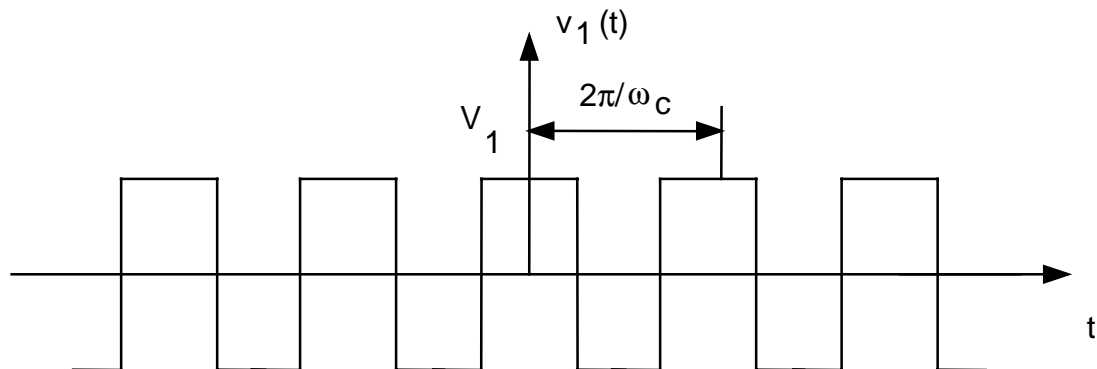
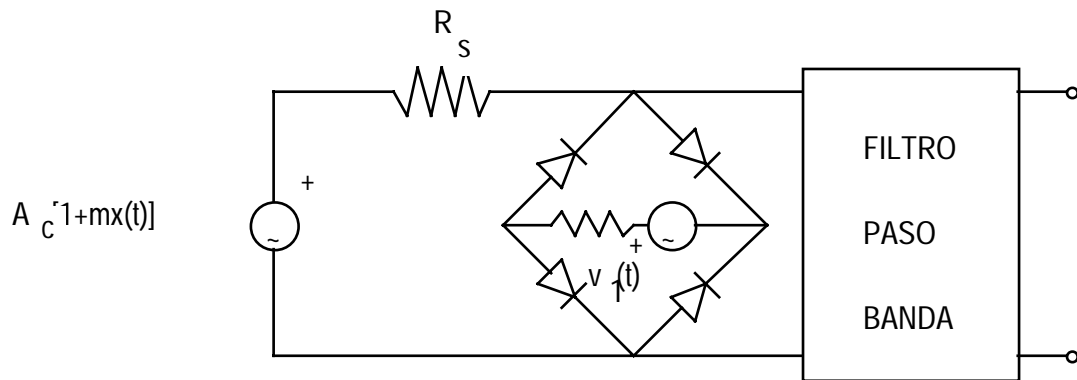


Si se verifica que  $\omega_c > 2w$ , la señal de salida será

$$s(t) = \frac{2}{\pi} A_c [1 + mx(t)] \cos \omega_c t$$

El elemento clave en este modulador es el conmutador que abre y cierra a la frecuencia portadora.

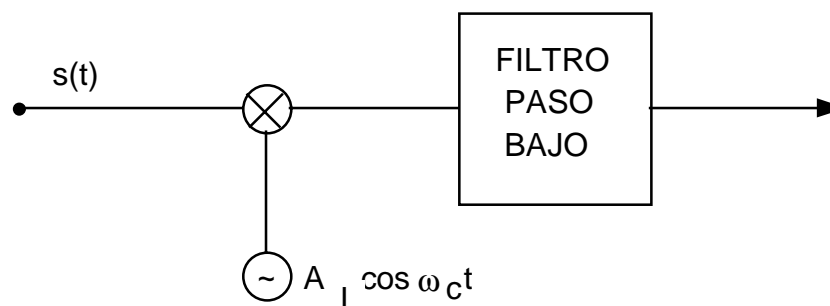
En la figura puede verse una realización sencilla del mismo mediante un puente de diodos.



Considerando los diodos ideales, es evidente que si  $V_1$  es lo suficientemente grande, los diodos estarán polarizados en directo y presentarán baja impedancia (conmutador cerrado) a la señal  $A_c[1+mx(t)]$  en los semiciclos positivos de  $v_1(t)$ . Por el contrario, la impedancia será elevada en los semiciclos negativos (conmutador abierto).

#### VII.2.1.4.- DEMODULACION DE AMPLITUD MODULADA

La demodulación de AM puede conseguirse mediante el esquema de la figura



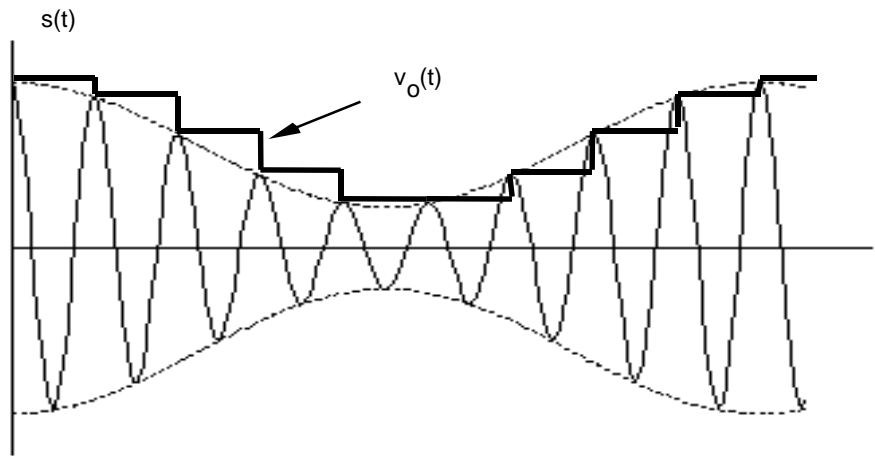
Este tipo de demodulación se conoce como demodulación o detección síncrona y requiere que el oscilador local esté sincronizado en frecuencia y fase con la portadora de la señal modulada. Será analizado con más detalle más adelante.

Puesto que la envolvente de AM tiene la misma forma que el mensaje, independientemente de la frecuencia y fase de la portadora, la demodulación puede lograrse extrayendo la envolvente sin necesidad de sincronismos que complican extraordinariamente la circuitería del demodulador.

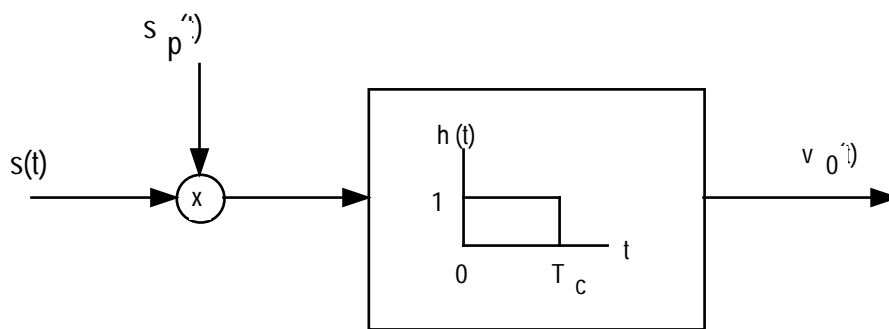
##### VII.2.1.4.1.-DETECTOR DE ENVOLVENTE DE PICO

Un detector de envolvente de pico ideal es aquel que muestrea cada pico positivo (o negativo) de la portadora y mantiene el valor hasta el próximo

ciclo como expresado en la figura. Esto es equivalente a un muestreo con periodo de muestreo igual al periodo de la portadora.



La operación es equivalente al siguiente esquema



siendo

$$s(t) = A_c [1 + m_x(t)] \cos \omega_c t = g(t) \cos \omega_c t$$

$$s_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_c)$$

$$h(t) = \Pi \left( \frac{t - T_c/2}{T_c} \right)$$

La salida  $v_o(t)$  será

$$v_o(t) = s(t) s_p(t) * \Pi\left(\frac{t-T_c/2}{T_c}\right)$$

en el dominio de la frecuencia

$$V_o(\omega) = \frac{1}{2\pi} S(\omega) * S_p(\omega) e^{-j\omega T_c/2} \frac{\text{sen}\omega T_c/2}{\omega}$$

Puesto que  $s_p(t)$  es periódica, su transformada viene dada por

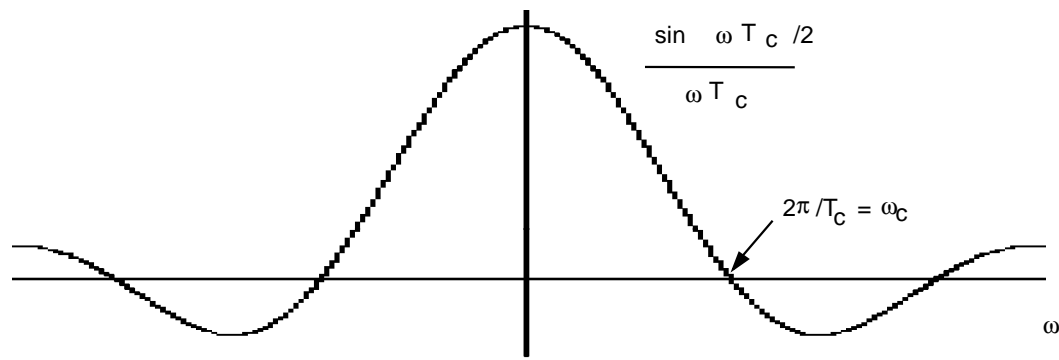
$$\begin{aligned} S_p(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{X_b(n\omega_c)}{T_c} 2\pi \delta(\omega - n\omega_c) = \\ &= \frac{1}{T_c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - n\omega_c) \end{aligned}$$

y la transformada de la salida

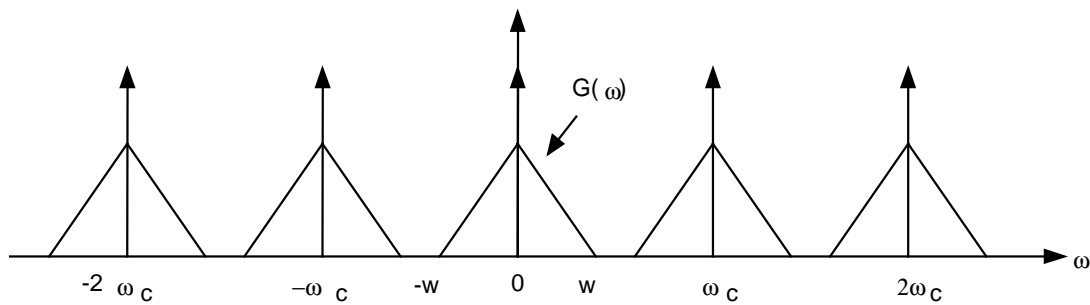
$$V_o(\omega) = e^{-j\omega T_c/2} \frac{\text{sen}\omega T_c/2}{\omega T_c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(\omega - n\omega_c)$$

Que salvo el factor de fase lineal (retardo puro en el tiempo) es el resultado de multiplicar





por



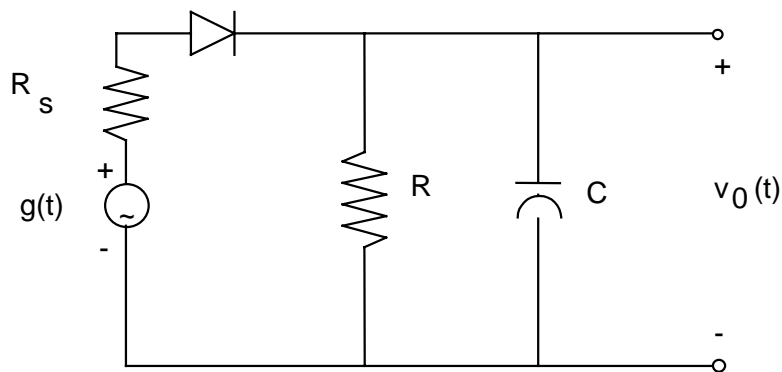
$G(\omega)$  : Transformada de la envolvente

Es evidente que la envolvente, obtenida mediante filtrado paso bajo, presentara una gran distorsión, a menos que

$$\omega_c \gg w$$

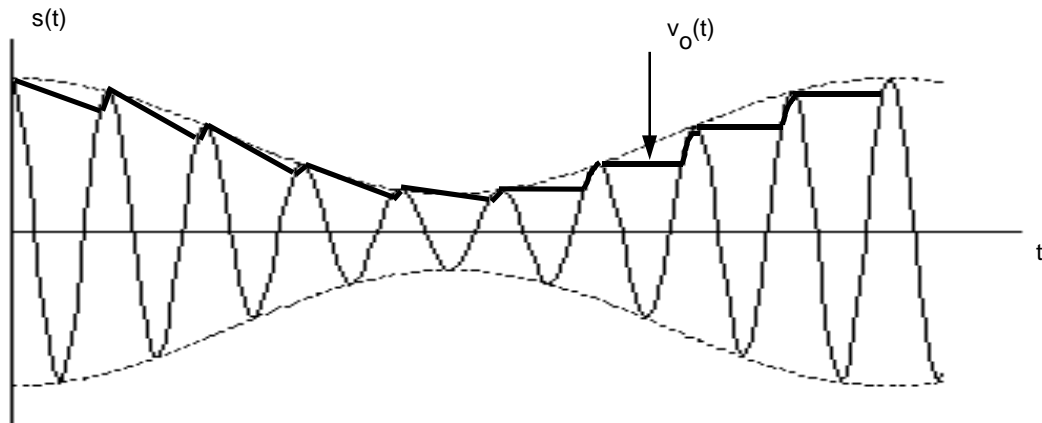
Cuando esta condición ocurre, la función superior es prácticamente constante en el ancho de banda del mensaje.

Una realización práctica del detector de envolvente de pico es



$R_S$  representa la resistencia equivalente de las etapas previas al detector.

La señal de salida tendrá la forma de la figura



La constante de tiempo de carga del condensador  $\tau_S = R_S C$  tiene que ser muy pequeña para que el condensador pueda cargarse al ritmo de la portadora. Por el contrario, la constante de tiempo de descarga  $\tau = RC$  debe ser grande con relación al periodo de portadora para que el condensador se descargue lentamente en cada ciclo de portadora. Por otra parte, la descarga debe ser más rápida que el decaimiento de la envolvente, de lo contrario el diodo no se activaría en los picos de portadora y habría distorsión. Esta condición es equivalente a decir que  $1/\tau$  es bastante mayor que la frecuencia máxima de la envolvente. Resumiendo

$$\tau_S = R_S C \ll T_C = \frac{2\pi}{\omega_C}$$

$$\frac{2\pi}{\omega_C} \ll \tau = RC \ll \frac{2\pi}{W}$$

De la última se deduce que, como en el caso ideal, debe verificarse que

$$\omega_C \gg W$$

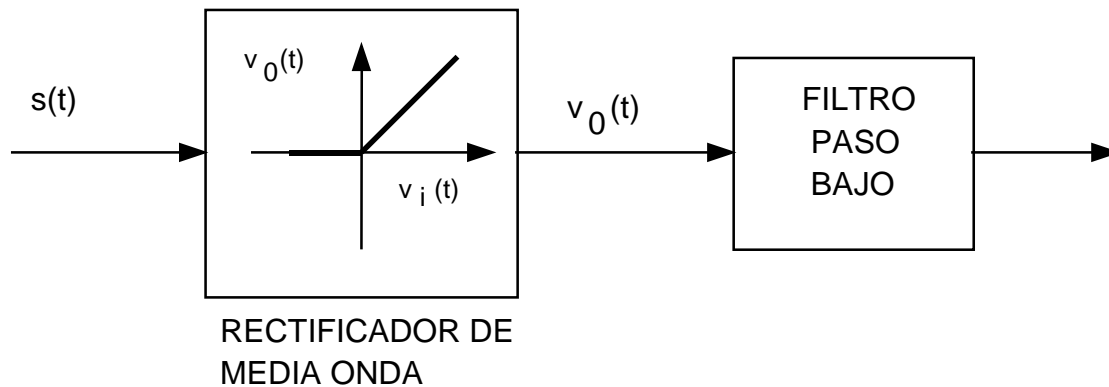
para tener un rizado pequeño, es decir, poca distorsión.

Este detector es el utilizado prácticamente en todos los receptores de onda media.

**VII.2.1.4.2.- DETECTOR DE ENVOLVENTE PROMEDIO**

El detector de envolvente de pico está restringido a situaciones donde hay una gran separación entre la frecuencia portadora y la frecuencia máxima.

Otra posibilidad de obtener la envolvente es mediante el siguiente esquema.



$$s(t) = g(t) \cos\omega_c t = A_c [1 + mx(t)] \cos\omega_c t$$

como  $g(t) \geq 0 \quad \forall t$

$$v_o(t) = s(t) p(t)$$

con

$$p(t) = \begin{cases} 1 & \cos\omega_c t > 0 \\ 0 & \cos\omega_c t < 0 \end{cases}$$

Desarrollando  $p(t)$  en serie de Fourier

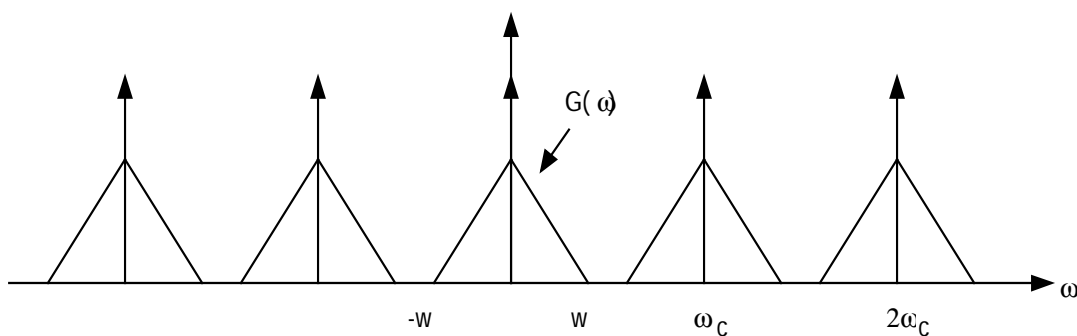
$$p(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos\omega_C t - \frac{2}{3\pi} \cos 3\omega_C t + \dots$$

$$v_O(t) = \frac{g(t)}{2} \cos\omega_C t + \frac{2g(t)}{\pi} \cos^2 \omega_C t - \frac{2g(t)}{3\pi} \cos 3\omega_C t \cos\omega_C t + \dots$$

$$= \frac{g(t)}{\pi} + \frac{g(t)}{2} \cos\omega_C t + \text{AM armónicos superiores}$$

El filtro paso bajo eliminará todas las señales si se verifica que

$$\omega_C > 2w$$

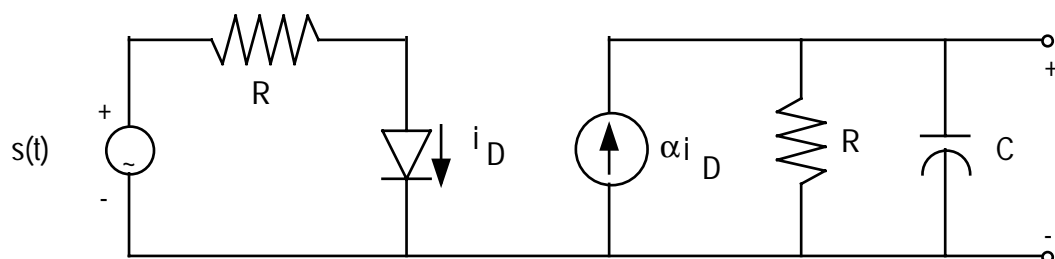


A diferencia del detector de envolvente de pico, el de envolvente promedio permite obtener, al menos de manera teórica, la envolvente exacta.

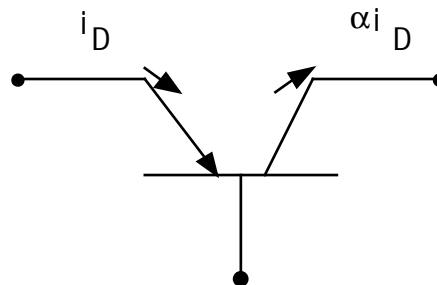
Si el rectificador fuese de onda completa, el término centrado en  $\omega_C$  no existiría y la condición se relaja aún más

$$\omega_C > w$$

Un detector práctico de envolvente promedio es el mostrado en la figura



Aquí el diodo y el filtro paso bajo están desacoplados. El desacoplo puede conseguirse, por ejemplo, mediante un transistor en base común, donde la unión base-emisor hace de diodo.



### VII.2.2.- MODULACION DOBLE BANDA LATERAL (DBL) (PORTADORA SUPRIMIDA)

No es más que la modulación AM vista anteriormente donde la portadora, que no conlleva información, es suprimida. Esto representa un ahorro considerable de potencia.

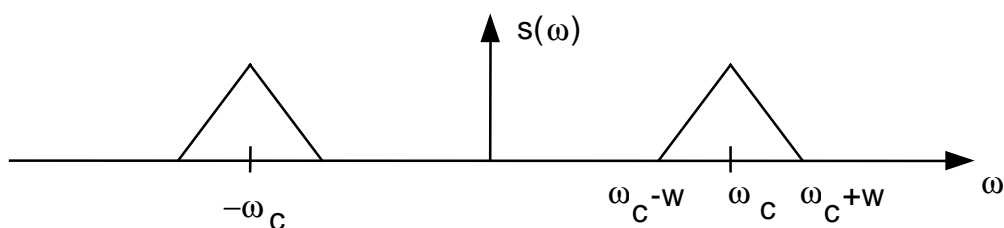
La forma de onda de la señal modulada es

$$s(t) = A_C x(t) \cos \omega_C t$$

la potencia transmitida

$$P_T = 2 P_{SB} = \frac{1}{2} \overline{x^2(t)} A_C^2$$

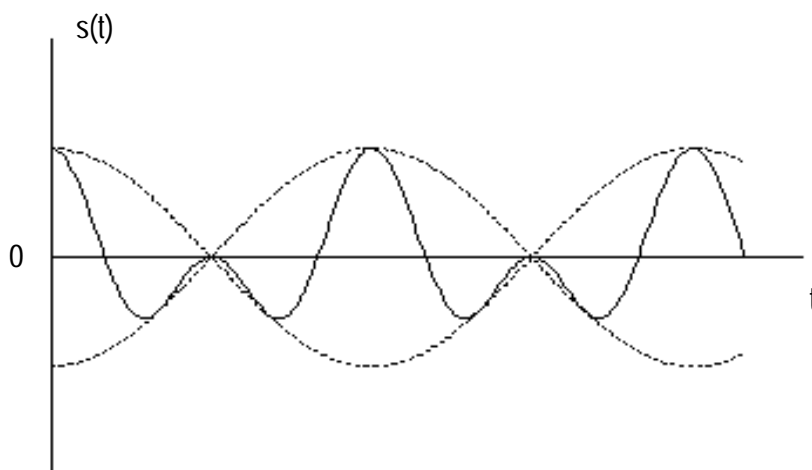
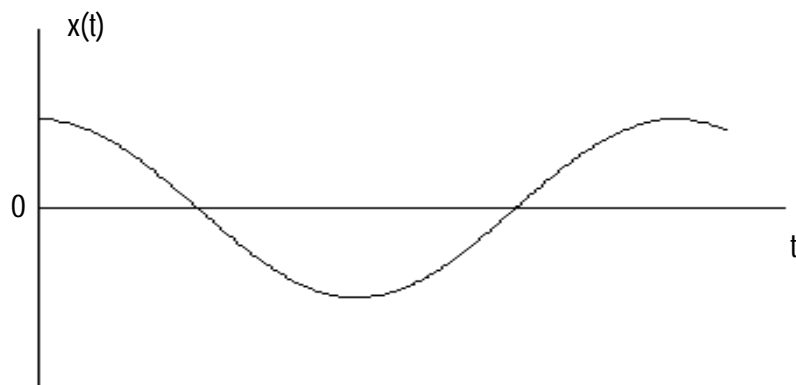
la transformada de Fourier



$$S(\omega) = \frac{A_c}{2} [X(\omega - \omega_c) + X(\omega + \omega_c)]$$

El ancho de banda sigue siendo el mismo que en AM.

En el dominio de la frecuencia AM y DBL son bastante similares. En el dominio del tiempo son bastante diferentes, la envolvente no tendrá la misma forma que el mensaje, pues los valores negativos de  $x(t)$  representan una inversión de fase de la portadora (igual que en AM con índice de modulación superior a la unidad). Por tanto, un simple detector de envolvente no serviría, lo que representa un compromiso entre eficiencia en potencia y sencillez del demodulador.

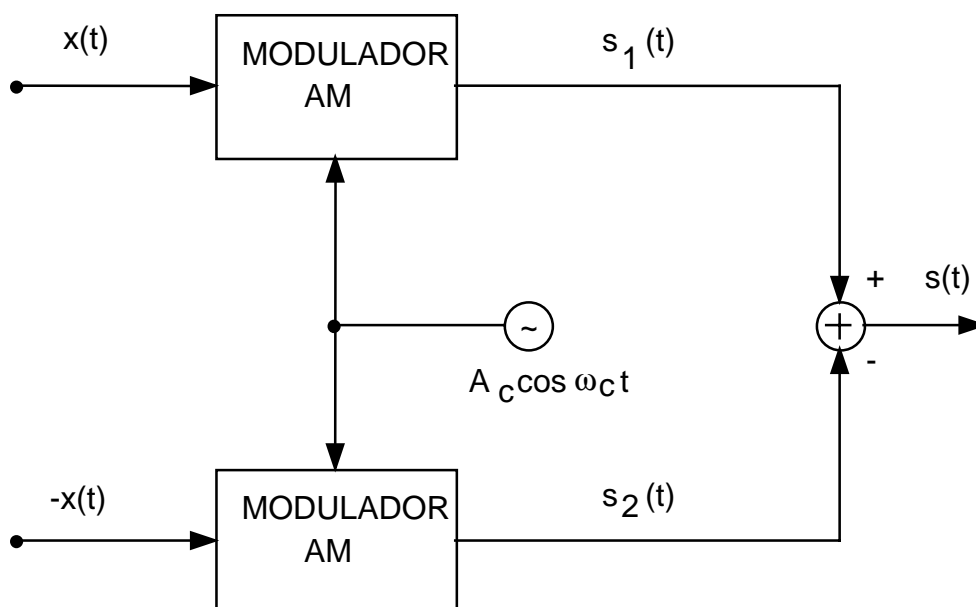


## VII.2.2.1.- GENERACION DE DOBLE BANDA LATERAL

De los tres métodos básicos de modulación AM vistos anteriormente, el primero y el tercero pueden servir perfectamente para generar DBL. En el segundo, el dispositivo no lineal debe ser perfectamente cuadrático, es decir, la característica entrada-salida sería

$$v_o(t) = av_i^2(t)$$

Dada la dificultad en conseguir un dispositivo de ley cuadrada exacta, se utiliza el modulador balanceado como en la figura



Suponiendo que ambos moduladores AM son idénticos

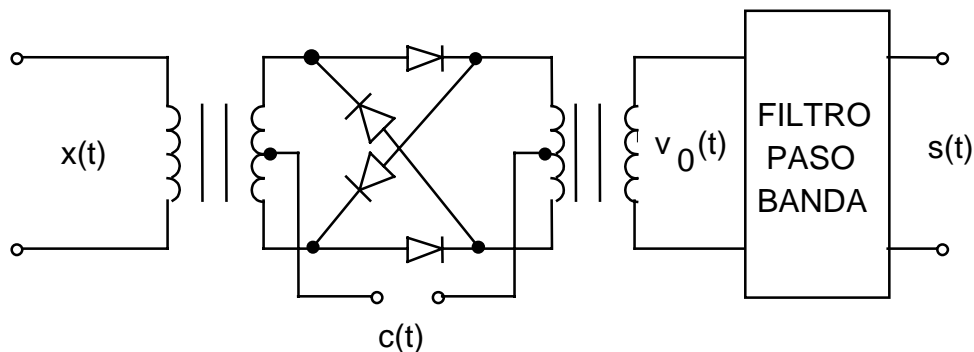
$$s_1(t) = A_c [1 + mx(t)] \cos \omega_c t$$

$$s_2(t) = A_c [1 - mx(t)] \cos \omega_c t$$

La diferencia entre ambas es la señal modulada

$$s(t) = s_1(t) - s_2(t) = 2A_c mx(t) \cos \omega_c t$$

Un esquema práctico de modulador por conmutación o chopper podría ser el siguiente



La señal  $c(t)$  es una onda cuadrada periódica con periodo  $T_C = 2\pi/\omega_C$ . Debe estar aplicada exactamente en el punto medio de los transformadores para que no aparezca en la salida. Y su amplitud debe ser suficientemente grande para que en el semiciclo positivo los diodos paralelos están en conducción, presentando una resistencia pequeña a  $x(t)$ , y los otros esté en corte, presentando una gran impedancia. La situación inversa se produce en el semiciclo negativo. De esta forma

$$v_0(t) = x(t) s_C(t)$$

con

$$s_C(t) = \begin{cases} 1 & c(t) > 0 \\ -1 & c(t) < 0 \end{cases}$$

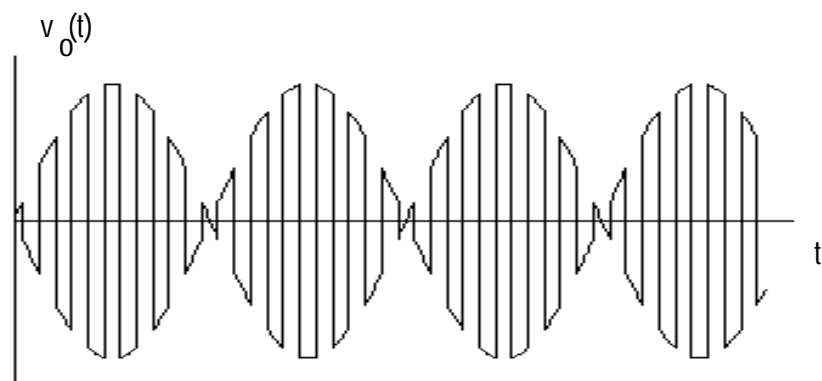
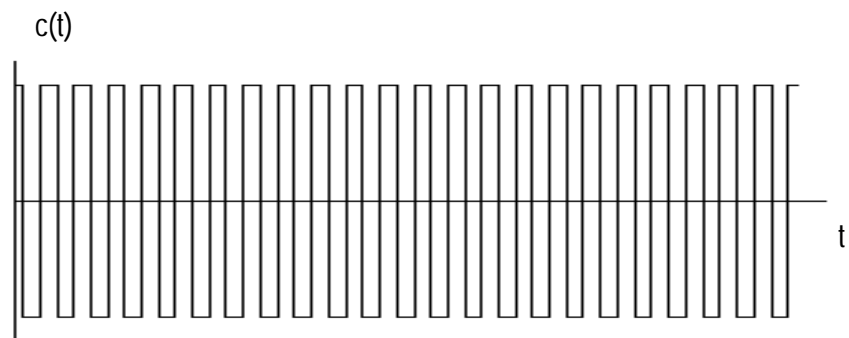
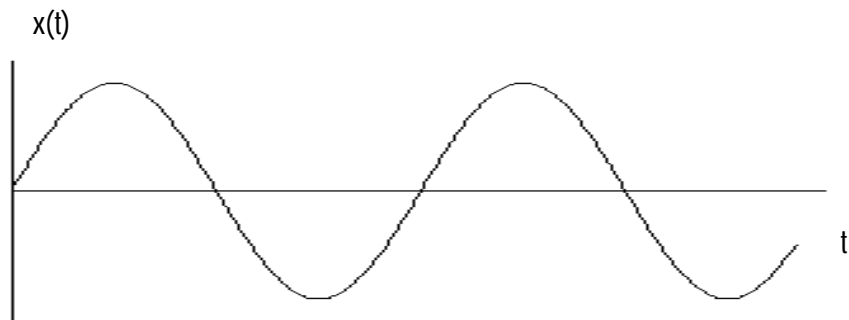
El desarrollo en serie de Fourier de  $s_C(t)$  es

$$s_C(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \cos [\omega_C t (2n-1)]$$

El filtro paso banda se encargará de eliminar todas las componentes espúreas ( $n \neq 1$ ) dando como señal de salida



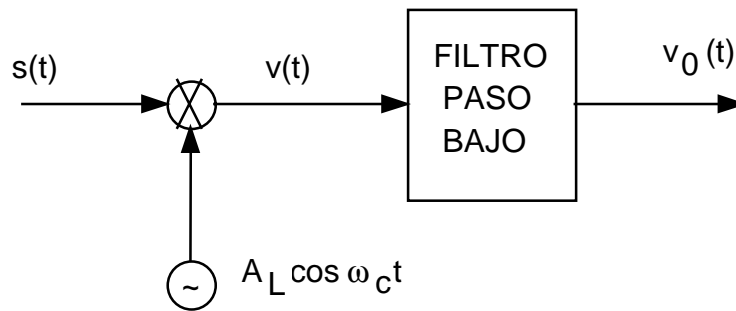
$$s(t) = \frac{4}{\pi} x(t) \cos \omega_c t$$



#### VII.2.2.2.- DETECCION COHERENTE DE DBL

En el caso de doble banda lateral, el simple detector de envolvente no sirve, y hay que recurrir a la detección coherente o síncrona.

El oscilador local del demodulador debe estar perfectamente sincronizado en frecuencia y fase con la portadora.



Para ver el efecto de la falta de sincronismo, sea  $A_L \cos[(\omega_c + \Delta\omega)t + \Delta\phi]$  la señal del oscilador local. La señal  $v(t)$  será

$$v(t) = A_C A_L x(t) \cos\omega_c t \cos[(\omega_c + \Delta\omega)t + \Delta\phi]$$

$$= \frac{1}{2} A_C A_L x(t) \{ \cos [2\omega_c + \Delta\omega)t + \Delta\omega] + \cos (\Delta\omega t + \Delta\phi) \}$$

Después de filtrar, la señal de salida será

$$v_0(t) = \frac{1}{2} A_C A_L x(t) \cos(\Delta\omega t + \Delta\phi)$$

si el error en frecuencia fuese despreciable ( $\Delta\omega \cong 0$ ) la salida sería

$$v_0(t) = \frac{1}{2} A_C A_L x(t) \cos\Delta\phi$$

Si  $\Delta\phi = \pm\pi/2$  la señal se anularía. En la práctica, las fluctuaciones del canal de transmisión harían que  $\Delta\phi$  fuese una función lentamente variable con el tiempo que modularía al mensaje produciendo un efecto de desvanecimiento (fading) aparente.

Si el oscilador está sincronizado en fase ( $\Delta\phi = 0$ ) pero no en frecuencia

$$v_0(t) = \frac{1}{2} A_C A_L x(t) \cos\Delta\omega t$$

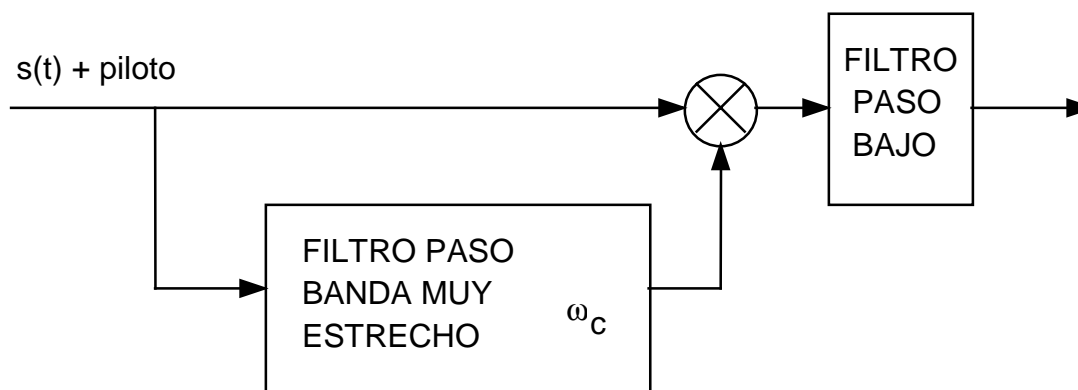
Así si  $x(t)$  es un tono de frecuencia  $f_m$ , la salida serían dos tonos con frecuencia  $f_m - \Delta f$  y  $f_m + \Delta f$ , respectivamente. Si  $\Delta f \ll f_m$ , el efecto sería equivalente a dos instrumentos musicales, ligeramente desafinados tocando al unísono.

#### VII.2.2.2.1.- SINCRONIZACION DE PORTADORA

Para la obtención de una portadora local sincronizada con la portadora de la señal modulada se utilizan diversos procedimientos, dos de ellos serán descritos a continuación. La sincronización mediante PLL (Phase Locked Loop) no es tema de este curso.

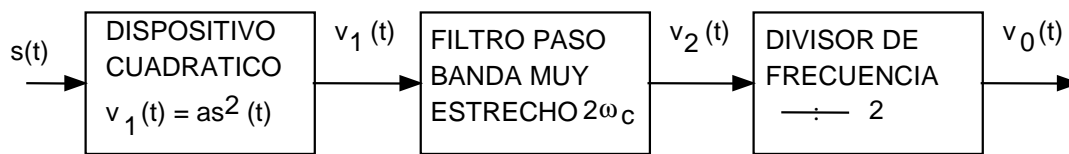
#### VII.2.2.2.2.- INCORPORACION DE PORTADORA

Algunos sistemas DBL incorporan una portadora piloto de muy bajo nivel de potencia para facilitar el sincronismo. El esquema de demodulación es el de la figura



#### VII.2.2.2.3.- GENERACION DE PORTADORA MEDIANTE LAZO CUADRATICO

Para sistemas con portadora totalmente suprimida, la portadora local puede generarse mediante el siguiente esquema



La salida del dispositivo cuadrático será

$$v_1(t) = ax^2(t) \cos^2(\omega_c t + \theta_c)$$

$$= \frac{ax^2(t)}{2} + \frac{ax^2(t)}{2} \cos 2(\omega_c t + \theta_c)$$

Si el filtro paso banda es lo suficientemente estrecho, la salida del mismo será

$$v_2(t) = \frac{a}{2} \overline{x^2(t)} \cos 2(\omega_c t + \theta_c)$$

Puesto que  $x^2(t)$  es siempre positivo, su valor medio será mayor que cero y por tanto el divisor de frecuencia daría una frecuencia portadora local sincronizada. No obstante, puede haber en esta última una ambigüedad en la fase de  $\pi$  radianes ya que con

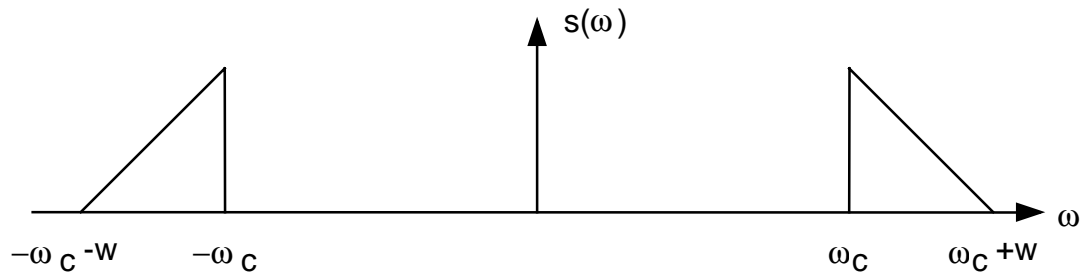
$$s(t) = x(t) \cos(\omega_c t + \theta_c + \pi)$$

se obtendría la misma portadora.

### VII.2.3.- MODULACION BANDA LATERAL UNICA (BLU)

Tanto en AM como en DBL el ancho de banda transmitido es,  $B_T = 2B$ , el doble del necesario para transmitir la información.

La modulación banda lateral única consiste en utilizar una de las bandas laterales (la banda superior o la inferior). Así para la banda superior, el espectro sería de la forma



En este caso el ancho de banda es  $B_T = B = \frac{W}{2\pi}$ . La potencia transmitida será

$$P_T = \frac{1}{4} A_c^2 \overline{x^2(t)} = P_{SB}$$

la mitad que en DBL. Luego este sistema es el más eficiente desde el punto de vista de ancho de banda y potencia.

Para obtener la representación en el dominio del tiempo, obsérvese que la función analítica de  $S(\omega)$  es la misma que la del mensaje trasladada a  $\omega_c$  y dividida por dos

$$A_S(\omega) = \frac{1}{2} A_X(\omega - \omega_c)$$

En el dominio del tiempo

$$a_S(t) = \frac{1}{2} a_X(t) e^{j\omega_c t} = \frac{1}{2} [x(t) + j\hat{x}(t)] e^{j\omega_c t}$$

Por tanto la señal modulada será (para banda lateral superior)

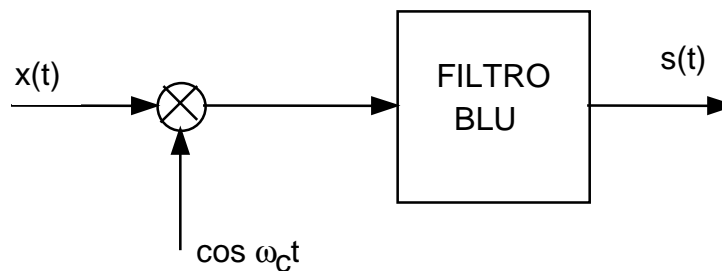
$$s_{BLS}(t) = \text{Re}[a_S(t)] = \frac{1}{2} [x(t) \cos\omega_c t - \hat{x}(t) \text{sen}\omega_c t]$$

Para la banda lateral inferior la señal analítica es la conjugada y la señal modulada será

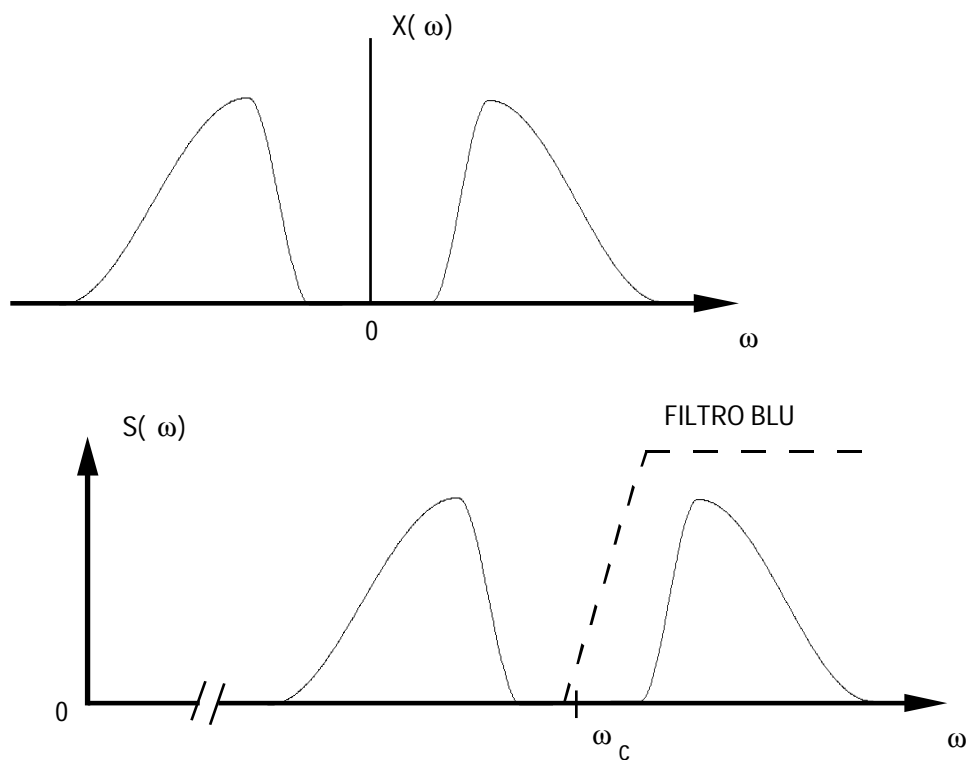
$$s_{\text{BLI}}(t) = \frac{1}{2} [x(t) \cos \omega_c t + \hat{x}(t) \sin \omega_c t]$$

### VII.2.3.1.- GENERACION DE BANDA LATERAL UNICA

#### VII.2.3.1.1.- DISCRIMINACION EN FRECUENCIA O FILTRADO

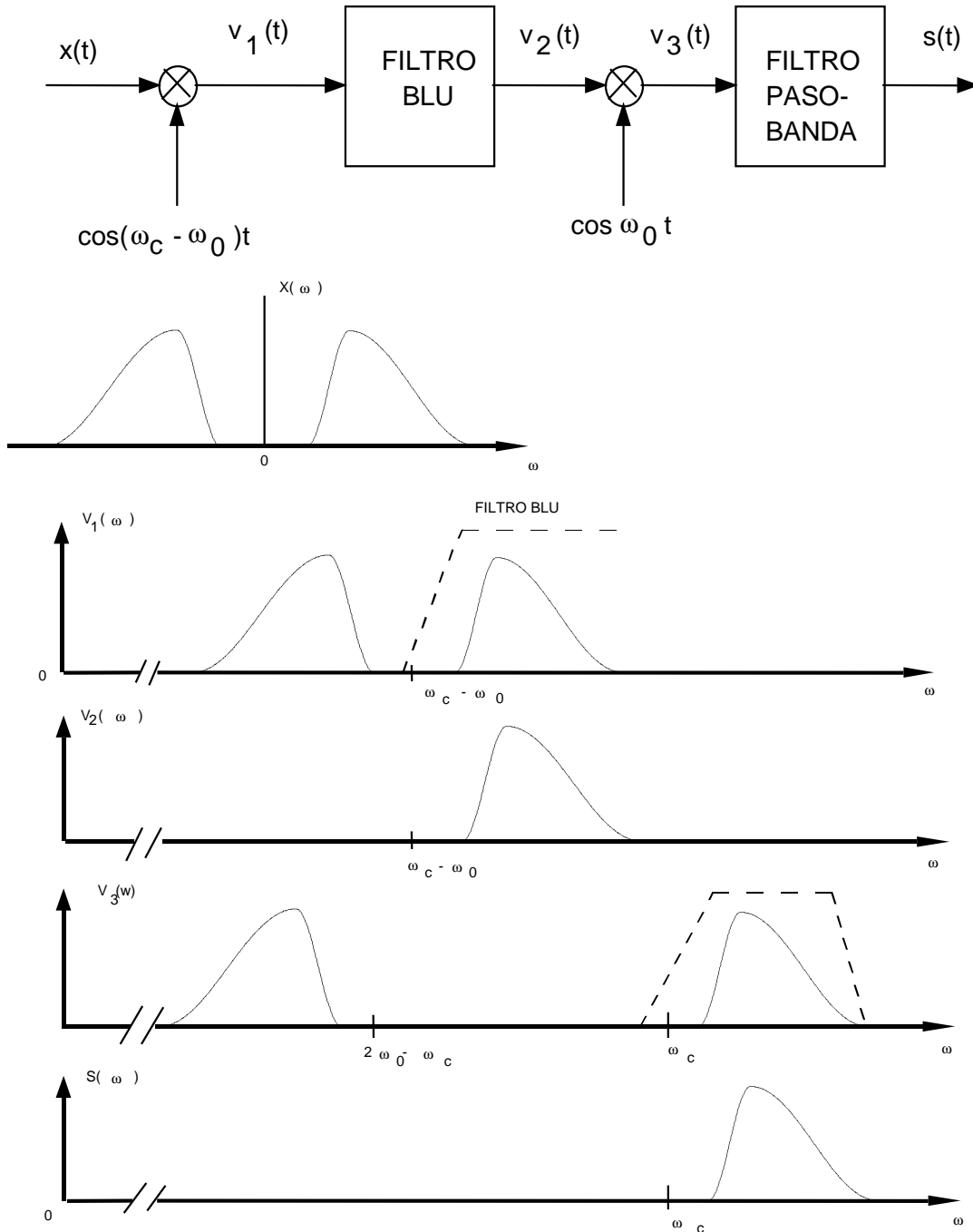


Se modula en DBL y luego se selecciona mediante filtrado una de las bandas. Dado que el filtro de BLU es irrealizable en la práctica, esta generación sólo podrá usarse cuando el espectro de  $x(t)$  tiene poco contenido en bajas frecuencias.



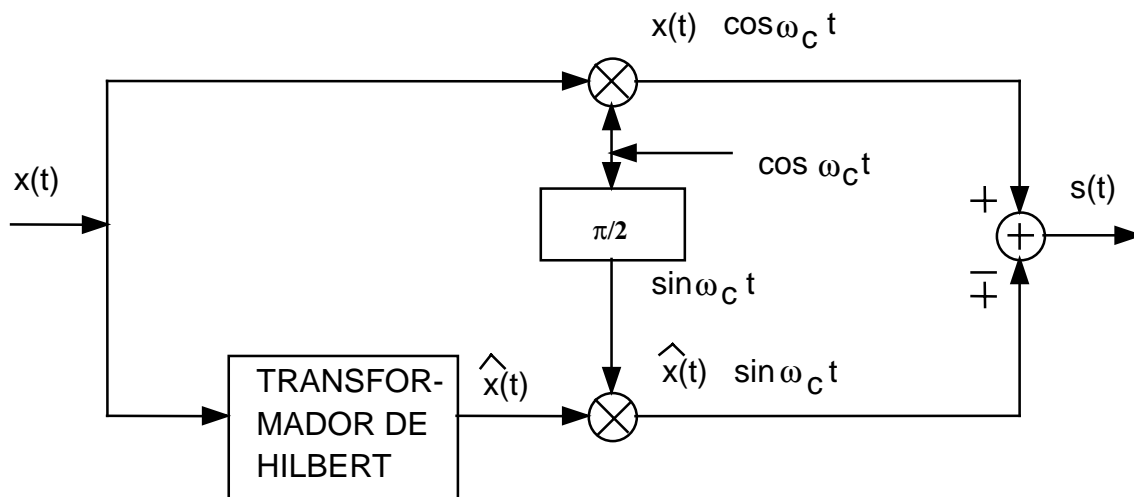
**VII.2.3.1.2.- DISCRIMINACION EN FRECUENCIA EN DOBLE ETAPA**

Aun cuando el mensaje tenga poco contenido en bajas frecuencias, si la frecuencia portadora es mucho más alta que la banda del mensaje, el diseño del filtro BLU puede ser complicado debido al pequeño ancho de banda de la región de transición, relativo a la portadora. En este caso puede recurrirse a un proceso de modulación múltiple como en la figura.



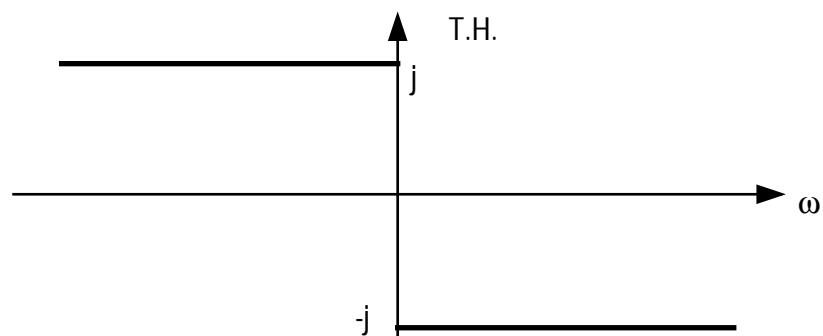
## VII.2.3.1.3.- MODULACION POR DISCRIMINACION DE FASE

La expresión de la señal BLU en el dominio del tiempo sugiere el siguiente modulador.



El signo (-) corresponde a BLS y el (+) a BLI.

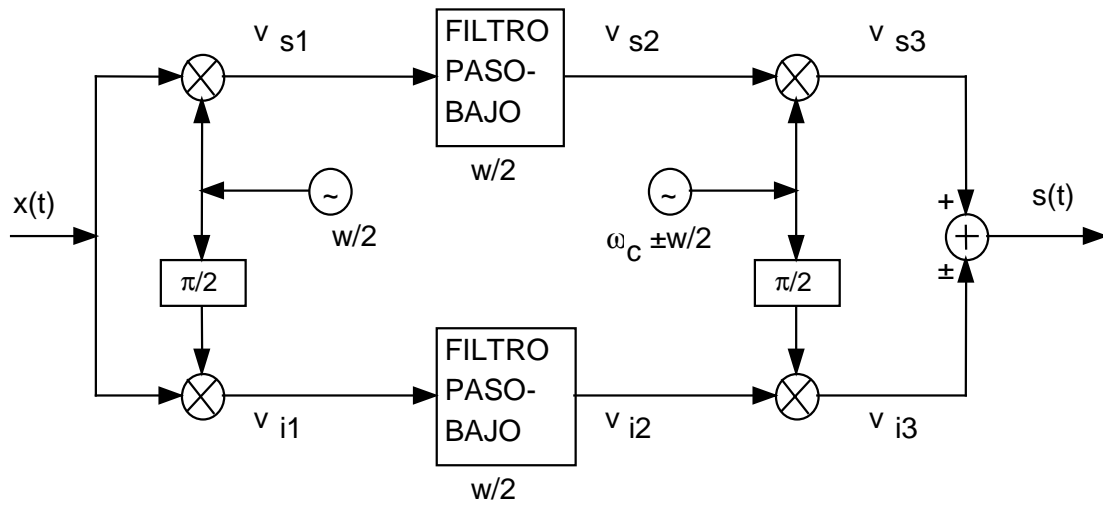
Sin embargo, el transformador de Hilbert es irrealizable de manera exacta.



Y aunque el mensaje tenga poco contenido en bajas frecuencias, la realización del transformador de Hilbert aproximado sigue siendo difícil.

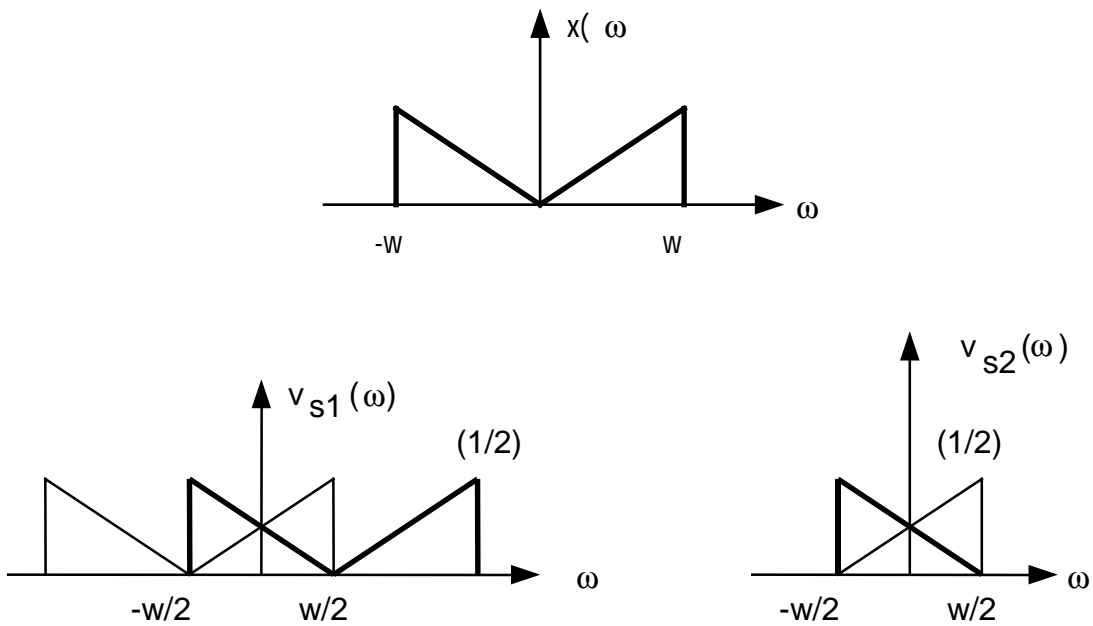


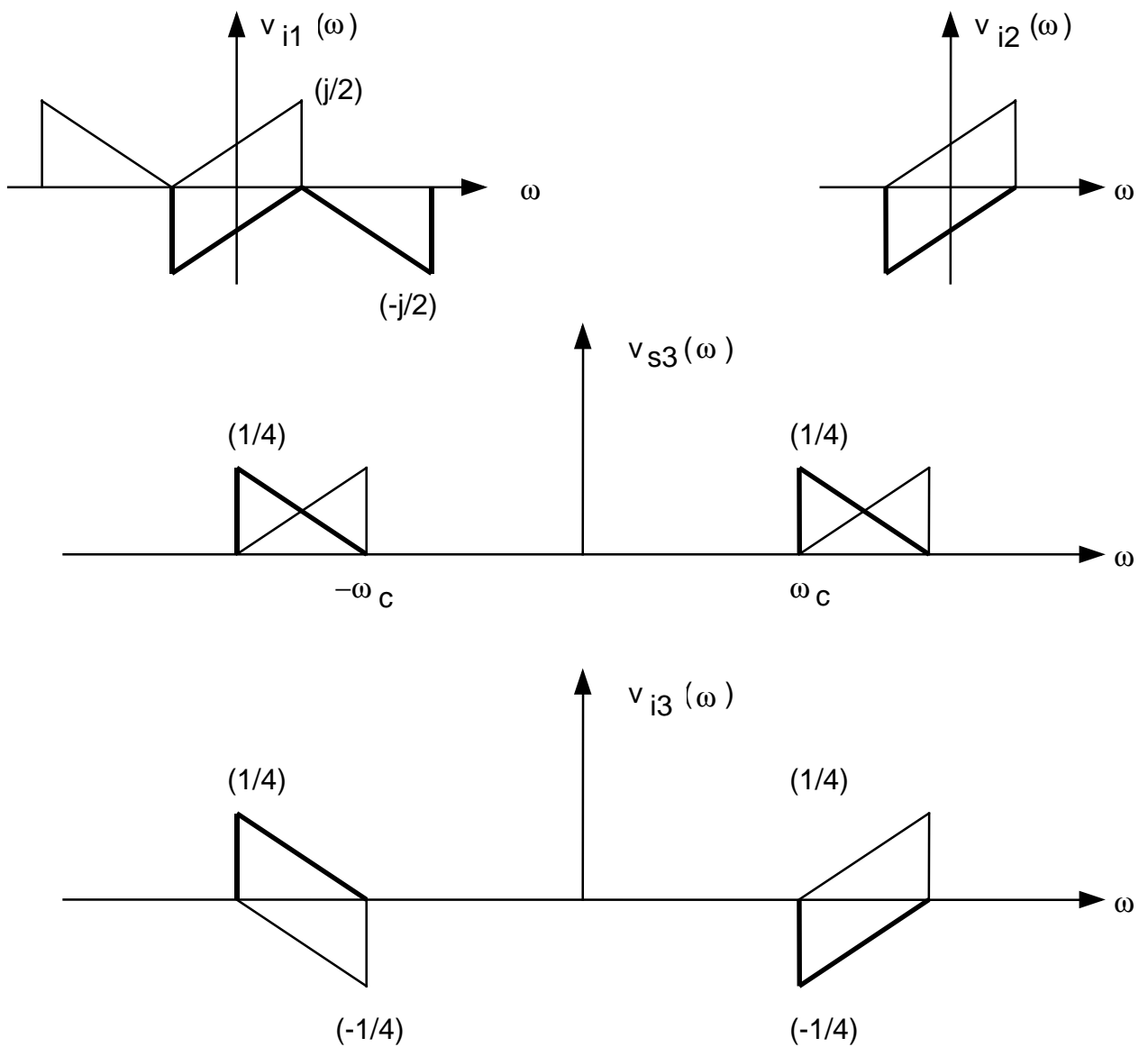
**VII.2.3.1.4.- MODULADOR DE WEABER**



es el más utilizado.

Como en el caso anterior puede obtenerse BLS seleccionando el signo superior (+) y BLI con (-). En la figura pueden verse los diferentes espectros obtenidos para la banda lateral superior.

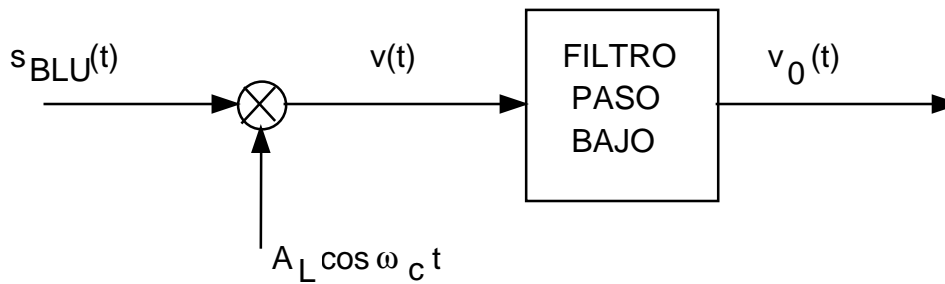




Sumando queda banda lateral superior. Restando quedaría BLI, pero a una frecuencia portadora  $\omega_c + \omega$ .

### VII.2.3.2.- DEMODULACION DE SEÑALES BLU

Como en DBL, con portadora suprimida, la demodulación de banda lateral única se realiza mediante detección coherente.



$$s_{BLU}(t) = \frac{A_C}{2} [x(t) \cos \omega_c t \pm \hat{x}(t) \sin \omega_c t]$$

El signo (-) corresponde a banda lateral superior y el (+) a banda lateral inferior.

Suponiendo la portadora local perfectamente sincronizada con la componente en fase de la señal BLU se tendrá

$$v(t) = \frac{A_C A_L}{4} x(t) + \frac{A_C A_L}{4} [x(t) \cos 2\omega_c t \pm \hat{x}(t) \sin 2\omega_c t]$$

El segundo término es una señal BLU con frecuencia portadora  $2\omega_c$  y será eliminada por el filtro paso bajo.

Para estudiar la distorsión producida por la falta de sincronismo supongamos que la portadora de referencia tiene la forma:  $A_L \cos[(\omega_c + \Delta\omega_c)t + \phi_c]$ , la señal de salida del filtro paso bajo es

$$v_0(t) = \frac{A_C A_L}{4} [x(t) \cos(\Delta\omega_c t + \phi_c) \pm \hat{x}(t) \sin(\Delta\omega_c t + \phi_c)]$$

Que es una señal BLU con frecuencia portadora  $\Delta\omega_c$  y fase  $\phi_c$ . Esta señal será banda lateral inferior si  $s_{BLU}(t)$  es banda lateral superior y viceversa.

Si suponemos en primer lugar  $\Delta\omega_c = 0$ , la salida tendrá la forma

$$v_0(t) = \frac{A_C A_L}{4} [x(t) \cos \phi_c \pm \hat{x}(t) \sin \phi_c]$$

cuya transformada de Fourier es

$$V_O(\omega) = \frac{A_C A_L}{4} X(\omega) [\cos\phi_C \pm (-j) \text{sign}(\omega) \text{sen}\phi_C]$$

$$V_O(\omega) = \frac{A_C A_L}{4} X(\omega) \begin{cases} e^{-j\phi_C} & \omega > 0 \\ e^{+j\phi_C} & \omega < 0 \end{cases}$$

Este retardo de fase constante a todas las frecuencia produce una distorsión de fase del mensaje que no es muy seria para la transmisión de voz ya que el oído es bastante insensible a la fase.

Suponiendo ahora que  $\phi_C = 0$  y que la señal moduladora es un tono simple  $x(t) = \cos\omega_m t$ , la salida será

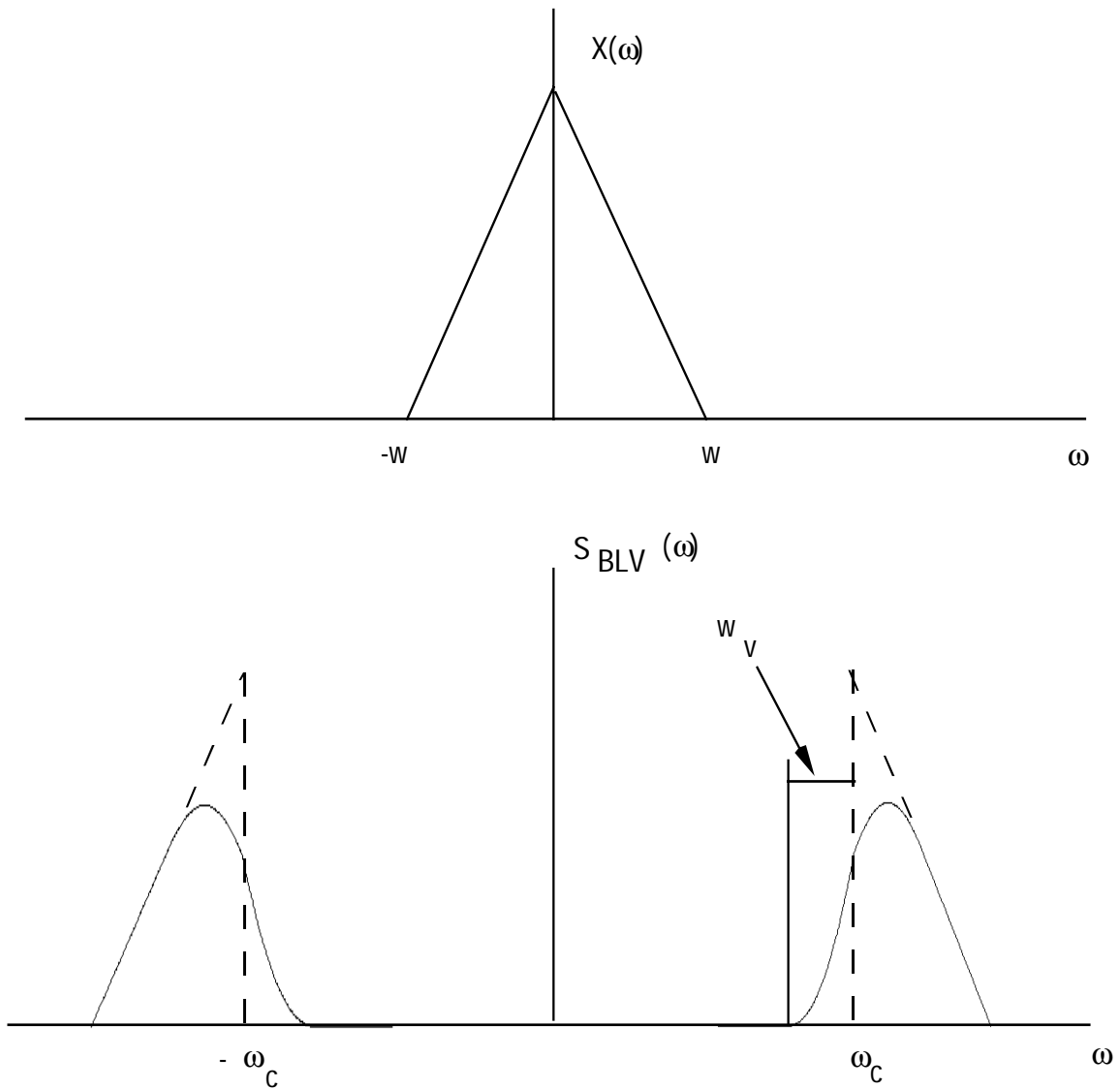
$$v_O(t) = \frac{A_C A_L}{4} [\cos\omega_m t \cos\Delta\omega_C t \pm \text{sen}\omega_m t \text{sen}\Delta\omega_C t]$$

$$v_O(t) = \frac{A_C A_L}{4} \cos(\omega_m \mp \Delta\omega_C)t$$

Que es el mismo tono desplazado por la desviación en frecuencia. El efecto primario sería destruir la relación armónica de las componentes espectrales. La voz tendría una calidad tipo pato donald y la música sonaría como la oriental.

#### VII.2.4.- BANDA LATERAL RESIDUAL O VESTIGIAL (BLV)

La banda lateral única es buena para transmisión de voz, debido al poco contenido en bajas frecuencias. Cuando la señal moduladora tiene componentes significativas en la parte baja del espectro (televisión y telegrafía), la realización del filtro BLU es difícil, no permitiendo la eliminación completa de la otra banda. Esta dificultad sugiere otro esquema de modulación conocido como banda lateral vestigial.



Una banda es transmitida casi completamente y sólo un residuo o vestigio de la otra.

El ancho de banda de transmisión será

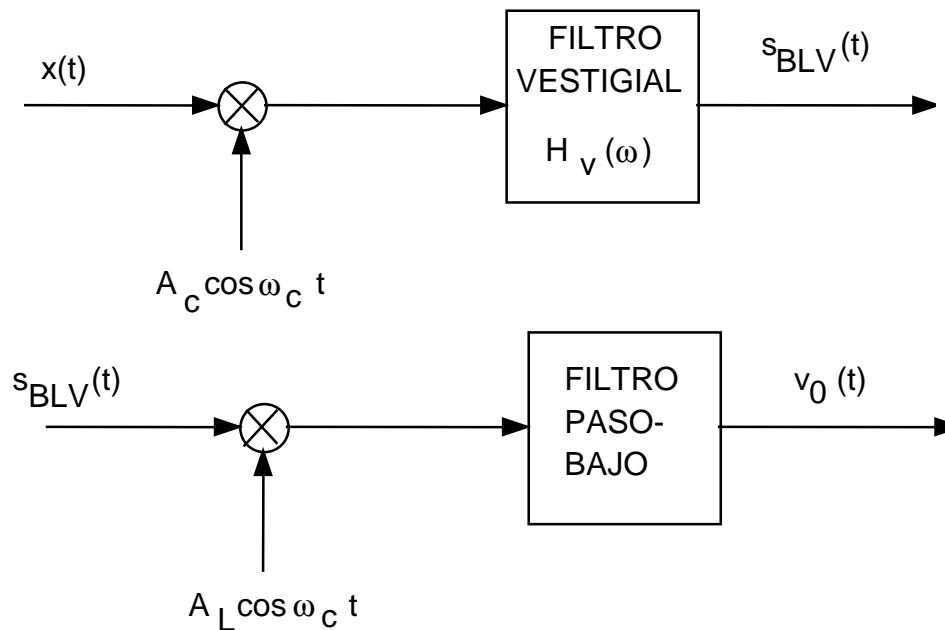
$$B_T = B + B_v$$

$$B_v = \frac{W_v}{2\pi}$$

La transformada de Fourier de la señal modulada en BLV puede considerarse como una de doble banda lateral que se hace pasar a través de un filtro conveniente.

$$S_{BLV}(\omega) = \frac{A_C}{2} [X(\omega - \omega_C) + X(\omega + \omega_C)] H_V(\omega)$$

La forma del filtro  $H_V(\omega)$  debe ser tal que el mensaje pueda ser recuperado sin distorsión



El efecto del multiplicador es desplazar el espectro de  $s_{BLV}(t)$  a derecha e izquierda la cantidad  $\omega_C$ . A la salida del filtro paso bajo la transformada de Fourier de  $v_0(t)$  será

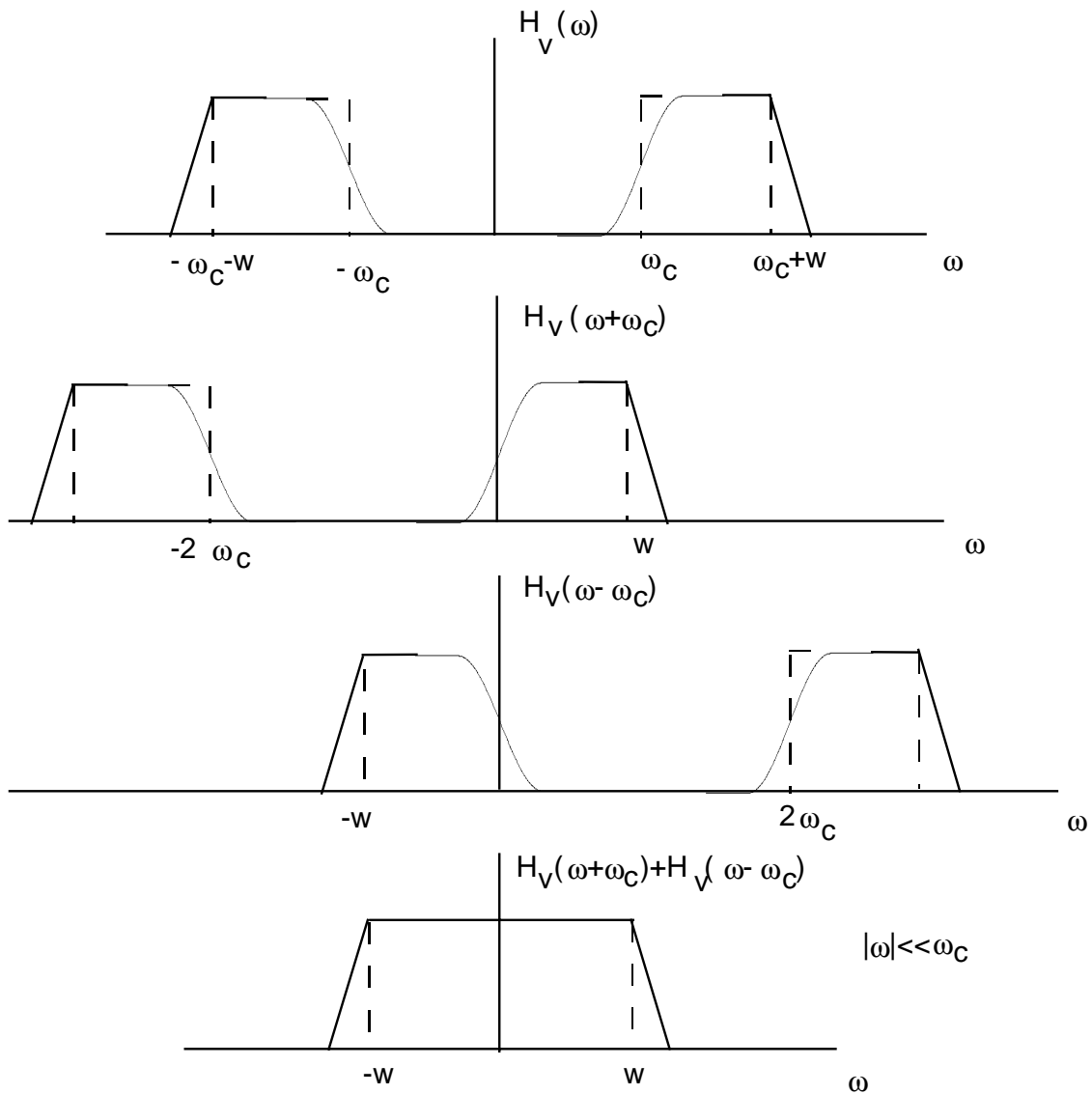
$$V_0(\omega) = \frac{A_C A_L}{4} X(\omega) [H_V(\omega - \omega_C) + H_V(\omega + \omega_C)]$$

Por tanto, para que no haya distorsión, el término entre corchetes debe ser constante.

$$H_V(\omega - \omega_C) + H_V(\omega + \omega_C) = 2H_V(\omega_C) = 1$$

Donde, sin pérdida de generalidad, se ha supuesto que  $H_V(\omega_C) = 1/2$ .

En realidad, puesto que la señal moduladora está limitada a  $|\omega| \leq w$ , la condición anterior sólo es necesario que se cumpla en el intervalo  $-w < \omega < w$ . De esta forma, el filtro  $H_V(\omega)$  pueda tener la forma.



Fuera de ese intervalo, la forma del filtro puede ser arbitraria.

Llamando  $A_{H_V}(\omega)$  y  $B_{H_V}(\omega)$  a las transformadas de las señales analítica y equivalente paso bajo del filtro  $H_V(\omega)$ , respectivamente, es evidente que

$$A_{H_V}(\omega) = 2H_V(\omega) u(\omega)$$

$$B_{H_V}(\omega) = 2H_V(\omega + \omega_c) \quad |\omega| \leq w$$

puesto que el filtro vestigial es real

$$H_V^*(-\omega) = H_V(\omega)$$

condición que es equivalente a escribir que

$$B_{H_V}^*(-\omega) = 2H_V(\omega - \omega_c) \quad |\omega| \leq w$$

Puede concluirse que la condición para que no haya distorsión, expresada en términos del equivalente paso bajo, es :

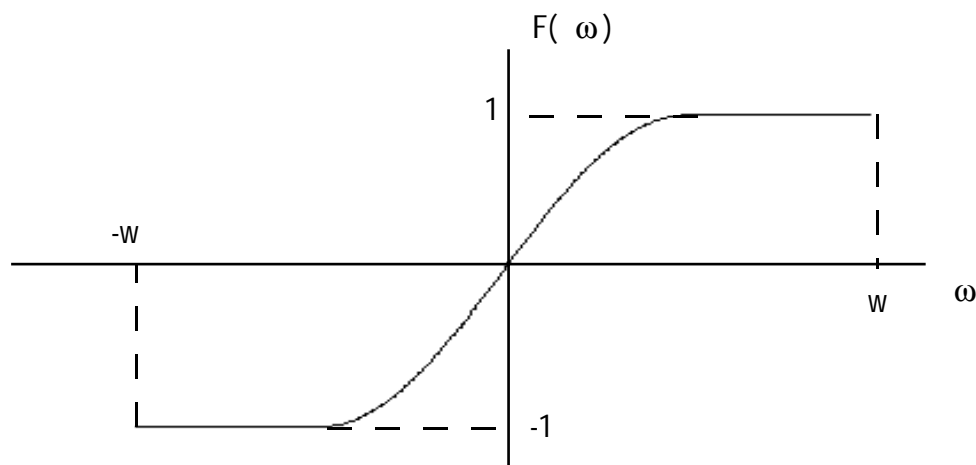
$$B_{H_V}(\omega) + B_{H_V}^*(-\omega) = 2 \quad |\omega| \leq w$$

escribiendo

$$B_{H_V}(\omega) = 1 + F(\omega)$$

la condición anterior es equivalente a

$$F^*(-\omega) = -F(\omega)$$



Puesto que  $F(\omega)$  es antihermítica, su transformada inversa  $f(t)$  será imaginaria pura

$$f(t) = jg(t) \quad g(t) \text{ real}$$

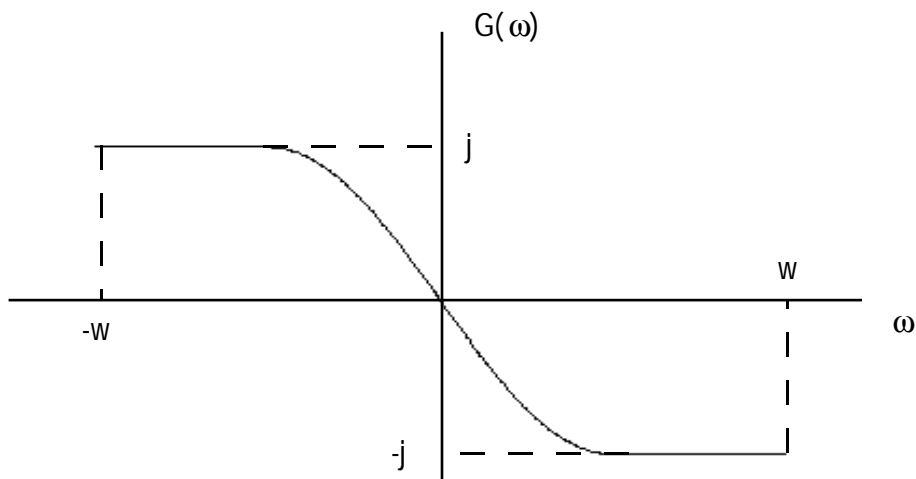


por lo que podrá escribirse que

$$B_{H_V}(\omega) = 1 + jG(\omega)$$

siendo  $G(\omega)$  la transformada de  $g(t)$  y por tanto hermítica

$$G^*(-\omega) = G(\omega)$$



#### VII.2.4.1.- EXPRESION DE LA SEÑAL MODULADA EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

La señal analítica en el dominio de la frecuencia de la señal BLV puede escribirse como

$$A_S(\omega) = \frac{1}{2} A_C X(\omega - \omega_c) A_{H_V}(\omega)$$

y su equivalente paso bajo

$$B_S(\omega) = \frac{1}{2} A_C X(\omega) B_{H_V}(\omega)$$

Sustituyendo el equivalente paso bajo del filtro

$$B_S(\omega) = \frac{1}{2} A_C [X(\omega) + jX(\omega) G(\omega)]$$

su transformada inversa será

$$b_S(t) = \frac{1}{2} A_C [x(t) + jq_X(t)]$$

siendo

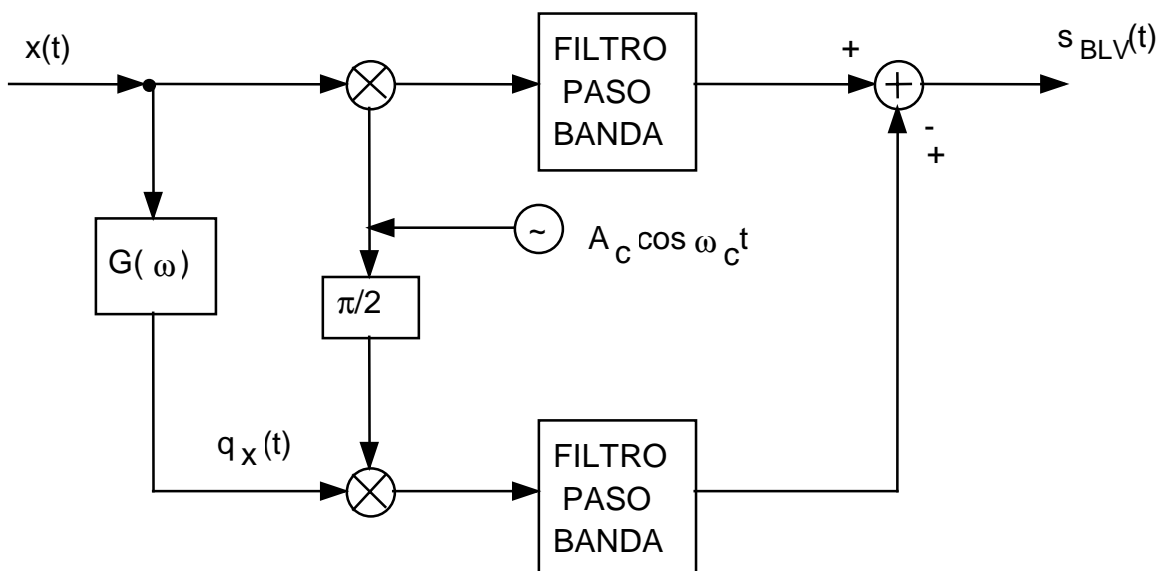
$$q_X(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\omega) G(\omega) e^{j\omega t} dt$$

Por tanto la señal en el tiempo será

$$s_{BLV}(t) = \text{Re} [b_S(t) e^{j\omega_c t}]$$

$$s_{BLV}(t) = \frac{1}{2} A_C [x(t) \cos \omega_c t - q_X(t) \sin \omega_c t]$$

Expresión que sugiere otra forma de obtener banda lateral vestigial



Obsérvese que el filtro  $G(\omega)$  es prácticamente el transformador de Hilbert aunque con una transición suave que lo hace más realizable. Si el

ancho de banda del vestigio tiende a cero, el filtro es exactamente el de Hilbert y la componente en cuadratura la transformada de Hilbert.

#### VII.2.4.2.- MODULACION BLV CON PORTADORA

Para poder demodular BLV con un detector de envolvente algunos sistemas incluyen portadora, de esta forma la señal modulada tendría la expresión

$$s(t) = \frac{1}{2} A_C [1 + mx(t)] \cos \omega_C t + \frac{1}{2} A_C m q_X(t) \sin \omega_C t$$

La salida del detector de envolvente sería :

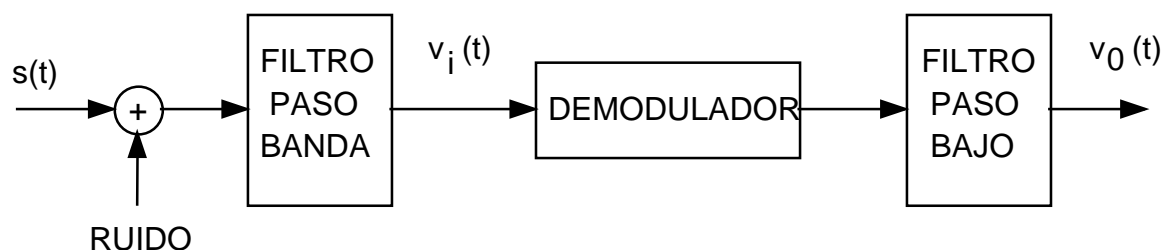
$$v_o(t) = \frac{1}{2} A_C \left\{ [1 + mx(t)]^2 + [mq_X(t)]^2 \right\}^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2} A_C [1 + mx(t)] \left\{ 1 + \left[ \frac{mq_X(t)}{1+mx(t)} \right]^2 \right\}^{1/2}$$

De donde se deduce que la distorsión de envolvente es producida por la componente en cuadratura. Esta distorsión puede reducirse bien disminuyendo el índice de modulación, bien aumentando el ancho de banda lateral vestigial de manera que se reduzca  $q_X(t)$ .

### VII.3.- RUIDO EN MODULACIONES LINEALES

#### VII.3.1.- RUIDO EN DOBLE BANDA LATERAL



El ruido se supone blanco y estacionario. El filtro paso banda está centrado en  $\omega_c$  y tiene de anchura  $2W = 4\pi B$ , es decir, el ancho de banda de transmisión. Su misión es filtrar el ruido reduciéndolo al mínimo posible. El ruido filtrado será por tanto paso banda.

La señal modulada es de la forma

$$s(t) = A_c x(t) \cos \omega_c t$$

La potencia de señal recibida es

$$S_R = \frac{1}{2} A_c^2 \overline{x^2(t)} = \frac{1}{2} A_c^2 P_x$$

La señal de entrada al demodulador será

$$v_i(t) = [A_c x(t) + i_n(t)] \cos \omega_c t - q_n(t) \sin \omega_c t$$

La señal detectada después de filtrar paso bajo será

$$v_o(t) = v_i(t) \cos \omega_c t + \text{FPB} = \frac{1}{2} A_c x(t) + \frac{1}{2} i_n(t)$$

El demodulador y el filtro paso bajo bloquean la componente en cuadratura del ruido.

El ruido final es aditivo y su potencia será

$$N_D = \frac{1}{4} \overline{i_n^2(t)}$$

Como se ha visto anteriormente, la potencia de la componente en fase es igual a la potencia del ruido paso banda, luego

$$N_D = \frac{1}{4} n^2(t) = \frac{1}{4} 2\eta B = \frac{1}{2} \eta B$$

La potencia de señal detectada es

$$S_D = \frac{1}{4} A_c^2 \overline{x^2(t)} = \frac{1}{4} A_c^2 P_x = \frac{1}{2} S_R$$

Luego la relación señal/ruido en detección será

$$(S/N)_D = \frac{S_R}{\eta B}$$

Un sistema banda base que recibiese el mismo mensaje con la misma potencia recibida, tendría una relación señal/ruido

$$(S/N)_{DBB} = \frac{S_R}{\eta B} = \gamma$$

Que es exactamente la misma. Luego DBL y banda base tienen las mismas prestaciones en lo que a reducción de ruido se refiere. Este resultado no es intuitivo ya que desde el punto de vista de traslación de frecuencias, parecería que al desplazar el espectro de la señal sería la misma que en banda base mientras que la potencia del ruido sería el doble que en banda base. Sin embargo, las bandas laterales de la señal se suman en amplitud (suma coherente) mientras que en el ruido lo que se suman son los espectros de potencia (suma incoherente) proporcionando el mismo ruido que en banda base.

### VII.3.2.- RUIDO EN BANDA LATERAL UNICA

La señal modulada tendrá la forma

$$s(t) = A_c \left[ x(t) \cos \omega_c t + \hat{x}(t) \sin \omega_c t \right]$$

La potencia de señal recibida es

$$S_R = \frac{1}{2} A_c^2 \overline{x^2(t)} + \frac{1}{2} A_c^2 \overline{\hat{x}^2(t)} = A_c^2 P_x$$

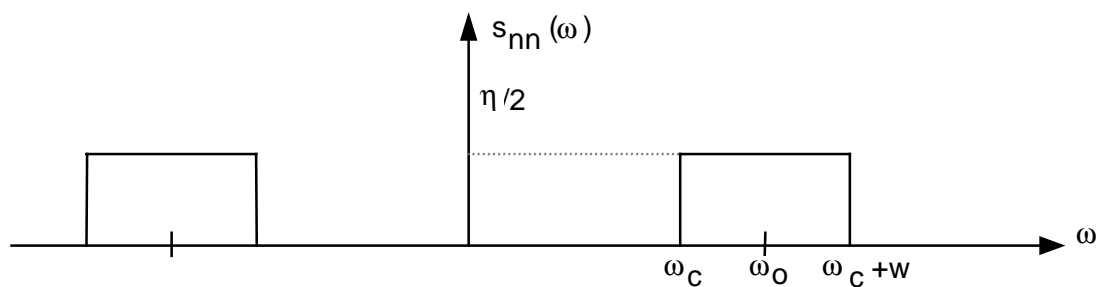
El ruido tiene ahora la forma

$$n(t) = i_n(t) \cos \omega_0 t - q_n(t) \sin \omega_0 t$$

$$\omega_0 = \omega_c \pm w/2$$

Los signos superiores corresponden a seleccionar la banda lateral superior y los inferiores a la inferior.

Obsérvese que el ruido no está centrado en la frecuencia portadora.



A la entrada del demodulador

$$v_i(t) = s(t) + n(t)$$

A la salida del detector

$$v_o(t) = v_i(t) \cos \omega_c t + \text{FPB}$$

$$= \frac{1}{2} A_c x(t) + \frac{1}{2} \left[ i_n(t) \cos \frac{w}{2} t \pm q_n(t) \sin \frac{w}{2} t \right]$$

La potencia de señal detectada vale

$$S_D = \frac{1}{4} A_c^2 \overline{x^2(t)} = \frac{1}{4} A_c^2 P_x = \frac{1}{4} S_R$$

La potencia de ruido será

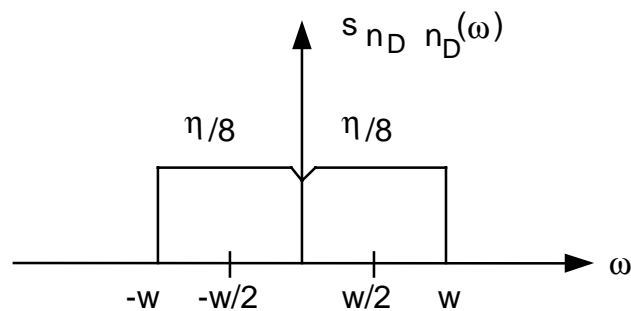
$$N_D = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{2} \overline{i_n^2(t)} + \frac{1}{2} \overline{q_n^2(t)} \right] = \frac{1}{4} \overline{n^2(t)} = \frac{1}{4} \eta B$$

Luego la relación señal/ruido en detección

$$(S/N)_D = \frac{S_R}{\eta B} = \gamma$$

Que también es la misma que en banda base.

Obsérvese que en esta modulación la componente en cuadratura del mensaje está ausente de la salida del detector mientras que aparece un término en cuadratura del ruido, debido a que la frecuencia central de éste no coincide con la frecuencia portadora. El ruido a la salida del detector puede interpretarse como un ruido paso banda centrado en  $\omega/2$ .



### VII.3.3.- RUIDO EN AMPLITUD MODULADA (AM) CON DETECCIÓN DE ENVOLVENTE

La señal modulada es

$$s(t) = A_C [1 + mx(t)] \cos \omega_C t$$

y la potencia recibida, suponiendo que el mensaje no tiene componente continua

$$S_R = \frac{1}{2} A_C^2 [1 + m^2 P_X]$$

La señal de entrada al modulador será

$$v_i(t) = \{A_C [1 + mx(t)] + i_n(t)\} \cos \omega_C t - q_n(t) \sin \omega_C t$$

A la salida del detector de envolvente

$$v_o(t) = \{ [A_c + A_c m x(t) + i_n(t)]^2 + q_n^2(t) \}^{1/2}$$

Suponiendo que la potencia de ruido es baja comparada con la de la portadora, el término debido a la componente cuadratura puede despreciarse

$$v_o(t) \approx A_c + A_c m x(t) + i_n(t)$$

El primer sumando no contiene información. Es un término de continua y debe ser bloqueado, luego la señal demodulada final será

$$y_D(t) = A_c m x(t) + i_n(t)$$

La potencia de señal detectada es

$$S_D = A_c^2 m^2 P_X = \frac{2m^2 P_X}{1+m^2 P_X} S_R$$

El ruido tendrá una potencia

$$N_D = \overline{i_n^2(t)} = \overline{n^2(t)} = 2\eta B$$

La relación señal ruido en detección es

$$(S/N)_D = \frac{m^2 P_X}{1+m^2 P_X} \frac{S_R}{\eta B} = \frac{m^2 P_X}{1+m^2 P_X} \gamma$$

Puesto que  $m|x(t)| \leq 1$  se tendrá también que  $m^2 P_X \leq 1$  por lo que la máxima relación señal/ruido será

$$(S/N)_{D\text{MAX}} = \frac{1}{2} \gamma$$



Es decir, la mitad de la de banda base, que refleja el hecho de que la mitad o más de potencia es gastada en la portadora. Así pues AM es inferior a banda base en, al menos, 3dB en la relación señal/ruido.