

TEMA VI.- SEÑALES Y PROCESOS PASO-BANDA

| | |
|--|-----------|
| VI.1.- SEÑAL ANALITICA | 1 |
| VI.2.- TRANSFORMADA DE HILBERT | 3 |
| VI.3.- PROCESADO DE SEÑALES MEDIANTE EL USO DE LAS SEÑALES ANALITICAS | 5 |
| VI.4.- ENVOLVENTE Y FRECUENCIA INSTANTANEA | 6 |
| VI.5.- TRANSFORMADA DE HILBERT DEL PRODUCTO DE UNA SEÑAL PASO BAJO Y OTRA PAJO ALTO CON ESPECTROS QUE NO SE SOLAPAN | 7 |
| VI.6.- PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE HILBERT | 10 |
| VI.6.1.- LINEALIDAD | 10 |
| VI.6.2.- AUTOCORRELACION Y ESPECTRO DE LA TRANSFORMADA DE HILBERT | 10 |
| VI.6.3.- CORRELACION CRUZADA DE UNA SEÑAL Y SU TRANSFORMADA DE HILBERT | 11 |
| VI.6.4.- RELACION DE ORTOGONALIDAD ENTRE UNA SEÑAL Y SU TRANSFORMADA DE HILBERT | 11 |
| VI.7.- TRANSFORMADA INVERSA DE HILBERT | 12 |
| VI.8.- TRANSFORMADA DE HILBERT DE LA CONVOLUCION DE DOS SEÑALES | 13 |
| VI.9.- SEÑALES CAUSALES Y TRANSFORMADA DE HILBERT | 13 |
| VI.10.- SEÑALES PASO BANDA | 15 |
| VI.11.- EQUIVALENTE PASO BAJO | 16 |
| VI.12.- SEÑALES SIMETRICAS Y ANTISIMETRICAS | 17 |
| VI.13.- COMPONENTES EN FASE Y CUADRATURA | 17 |
| VI.14.- RETARDOS DE FASE Y DE GRUPO | 19 |
| VI.15.- FILTRADO EQUIVALENTE PASO BAJO | 23 |
| VI.16.- REPRESENTACION FASORIAL DE SEÑALES PASO BANDA | 24 |
| VI.17.- REPRESENTACION DE PROCESOS ESTACIONARIOS PASO-BANDA | 26 |
| VI.17.1.- AUTOCORRELACION Y CORRELACION CRUZADA DE LOS PROCESOS FASE Y CUADRATURA | 27 |

Comunicaciones Analógicas

| | |
|---|-----------|
| VI.17.2.- AUTOCORRELACION DEL PROCESO PASO BAJO | 30 |
| VI.17.3.- AUTOESPECTRO DE LOS PROCESOS FASE Y CUADRATURA | 31 |
| VI.17.4.- ESPECTRO CRUZADO DE LAS SEÑALES FASE Y CUADRATURA | 33 |
| VI.17.5.- ESPECTROS DEL PROCESO BAJO Y DEL PROCESO ANALITICO | 34 |
| VI.17.6.- PROPIEDADES DE LAS COMPONENTES FASE Y CUADRATURA DE LA AUTOCORRELACION DEL PROCESO PASO BANDA. | 35 |
| VI.18.- RUIDO BLANCO PASO BANDA | 36 |
| VI.19.- PROCESOS PASO-BANDA NO ESTACIONARIOS | 37 |
| VI.19.1.- PROCESOS PASO-BANDA CON FASE ALEATORIA | 38 |

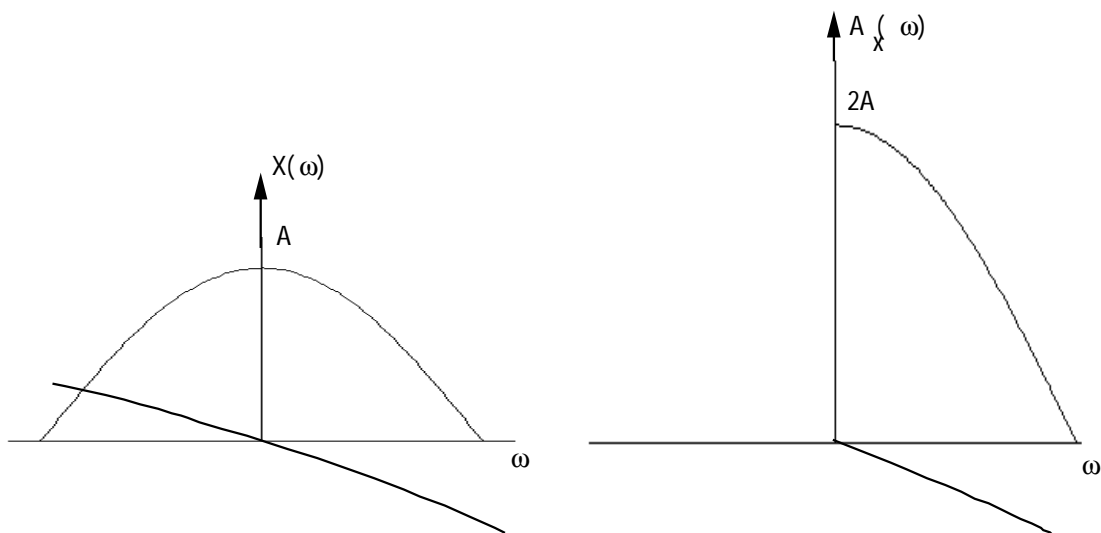
VI.1.- SEÑAL ANALÍTICA

Dada la redundancia existente entre las frecuencias positivas y negativas de la respuesta frecuencial de una señal real, puede usarse sólo la parte positiva (o negativa) del espectro para caracterizar completamente la señal.

Se define la señal analítica de $x(t)$ como :

$$A_X(\omega) = 2X(\omega)u(\omega)$$

o sea, el doble del espectro de las frecuencias positivas



De forma análoga podría definirse otra función analítica.

$$A_X^-(\omega) = 2X(\omega)u(-\omega)$$

para frecuencias negativas. Obsérvese que

$$A_X^-(-\omega) = A_X^*(\omega) \quad \omega \geq 0$$

En el dominio del tiempo, la señal analítica tendrá la expresión:

$$a_x(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = F^{-1} [A_x(\omega)]$$

compruébese que

$$a_x^*(t) = F^{-1} [A_x^*(\omega)] = a_x^*(t)$$

Esta señal es compleja y su parte real es precisamente la señal $x(t)$

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[\int_0^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right]$$

La parte imaginaria $\hat{x}(t)$ es

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left[\int_0^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right]$$

y se conoce como transformada de Hilbert y en el próximo apartado se verá otra expresión más común. Concluyendo

$$a_x(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$$

$$x(t) = \operatorname{Re} [a_x(t)]$$

$$\hat{x}(t) = \operatorname{Im} [a_x(t)]$$

Obsérvese que la señal analítica $a_x(t)$ es coherente con el análisis fasorial. Así si

$$x(t) = A \cos \omega_0 t$$

se tiene que

$$X(\omega) = \pi A \delta(\omega - \omega_0) + \pi A \delta(\omega + \omega_0)$$

La transformada de Hilbert será

$$\hat{X}(t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left[\int_0^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] = A \operatorname{sen} \omega_0 t$$

y la señal analítica

$$a_x(t) = x(t) + j\hat{X}(t) = A e^{j\omega_0 t}$$

VI.2.- TRANSFORMADA DE HILBERT

En el apartado anterior se ha definido la transformada de Hilbert como

$$\hat{X}(t) = \operatorname{Im} [a_x(t)] = \operatorname{Im} \{ F^{-1} [A_X(\omega)] \}$$

Teniendo en cuenta que :

$$A_X(\omega) = 2X(\omega) u(\omega) = X(\omega) [1 + \operatorname{sign}(\omega)]$$

su transformada inversa será

$$a_x(t) = x(t) + F^{-1} [X(\omega) \operatorname{sign}(\omega)]$$

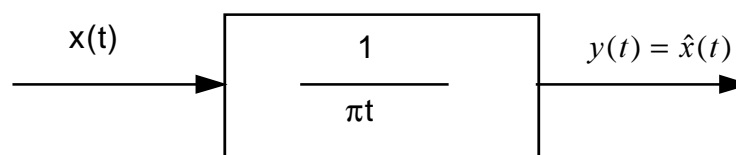
Dado que :

$$\operatorname{sign}(\omega) \xrightarrow{F^{-1}} j \frac{1}{\pi t}$$

$$a_x(t) = x(t) + j x(t) * \frac{1}{\pi t}$$

Por tanto :

$$\hat{x}(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} dt$$

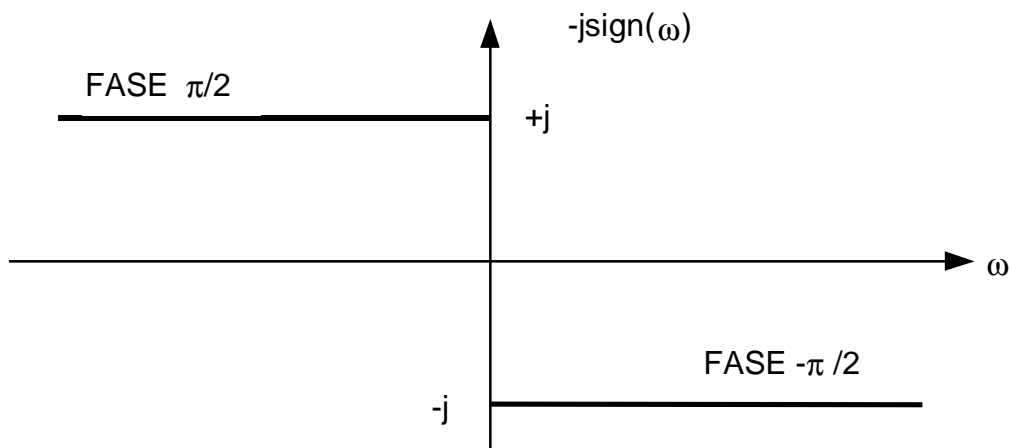


Esta expresión es la que realmente se conoce como transformada de Hilbert.

En el dominio frecuencial

$$X(\omega) = -j \text{sign}(\omega) X(\omega)$$

Así pues para obtener la transformada de Hilbert de una señal $x(t)$, la pasamos a través de un sistema lineal cuya función de transferencia es :



Dispositivo que puede considerarse que produce un desfase de -90 grados para las frecuencia positivas y 90 grados para las negativas mientras que las amplitudes son inalteradas. Este dispositivo ideal se le conoce como transformador de Hilbert o filtro en cuadratura.

EJEMPLO :

$$x(t) = \cos\omega_0 t$$

su transformada de Fourier

$$X(\omega) = \pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

Por tanto la respuesta frecuencial de la transformada de Hilbert

$$X(\omega) = -j\text{sign}(\omega) X(\omega) = \frac{\pi}{2j} \delta(\omega - \omega_0) - \frac{\pi}{2j} \delta(\omega + \omega_0)$$

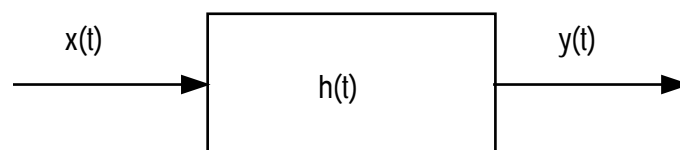
Luego :

$$\hat{x}(t) = \text{sen}\omega_0 t$$

Análogamente

$$\text{sen}\omega_0 t \quad \xrightarrow{\quad H \quad} \quad -\text{cos}\omega_0 t$$

VI.3.- PROCESADO DE SEÑALES MEDIANTE EL USO DE LAS SEÑALES ANALITICAS



Puesto que

$$A_x(\omega) = 2X(\omega) u(\omega)$$

$$Y(\omega) = H(\omega) X(\omega)$$

se tendrá que

$$A_y(\omega) = H(\omega) A_x(\omega)$$

y también

$$A_y(\omega) = \frac{1}{2} A_H(\omega) A_x(\omega)$$

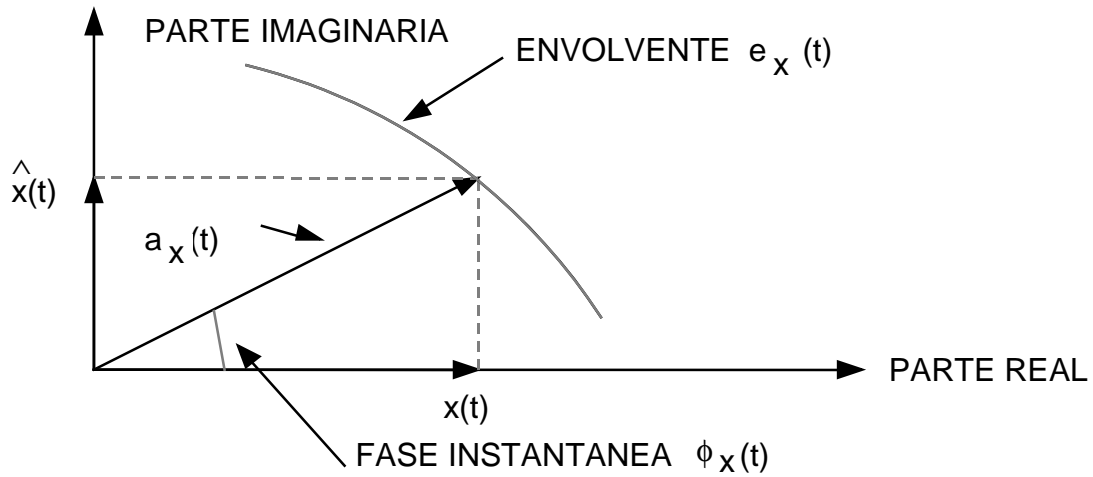
y en el dominio del tiempo

$$a_y(t) = h(t) * a_x(t)$$

$$a_y(t) = \frac{1}{2} a_h(t) * a_x(t)$$

VI.4.- ENVOLVENTE Y FRECUENCIA INSTANTANEA

Igual que en fasores, $a_x(t)$ puede interpretarse como un vector en el plano complejo



La envolvente de la señal $x(t)$ es

$$e_x(t) = |a_x(t)| = \sqrt{x^2(t) + \hat{x}^2(t)}$$

La fase instantánea

$$\phi_x(t) = \arctg \frac{\hat{x}(t)}{x(t)}$$

La frecuencia instantánea puede calcularse como

$$f_{ix}(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi_x(t)}{dt}$$

VI.5.- TRANSFORMADA DE HILBERT DEL PRODUCTO DE UNA SEÑAL PASO BAJO Y OTRA PASO ALTO CON ESPECTROS QUE NO SE SOLAPAN

Sea

$$x(t) = b(t) a(t)$$

donde $b(t)$ es una señal paso bajo con transformada $B(\omega)$ tal que $B(\omega)=0$ para $|\omega| > W$ y $a(t)$ es paso alto tal que $A(\omega) = 0$ si $|\omega| < W$.

La transformada de Fourier de $x(t)$ es

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} A(\omega) * B(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega-\omega') B(\omega') d\omega'$$

La respuesta frecuencial de la transformada de Hilbert

$$X(\omega) = -j\text{sign}(\omega) X(\omega)$$

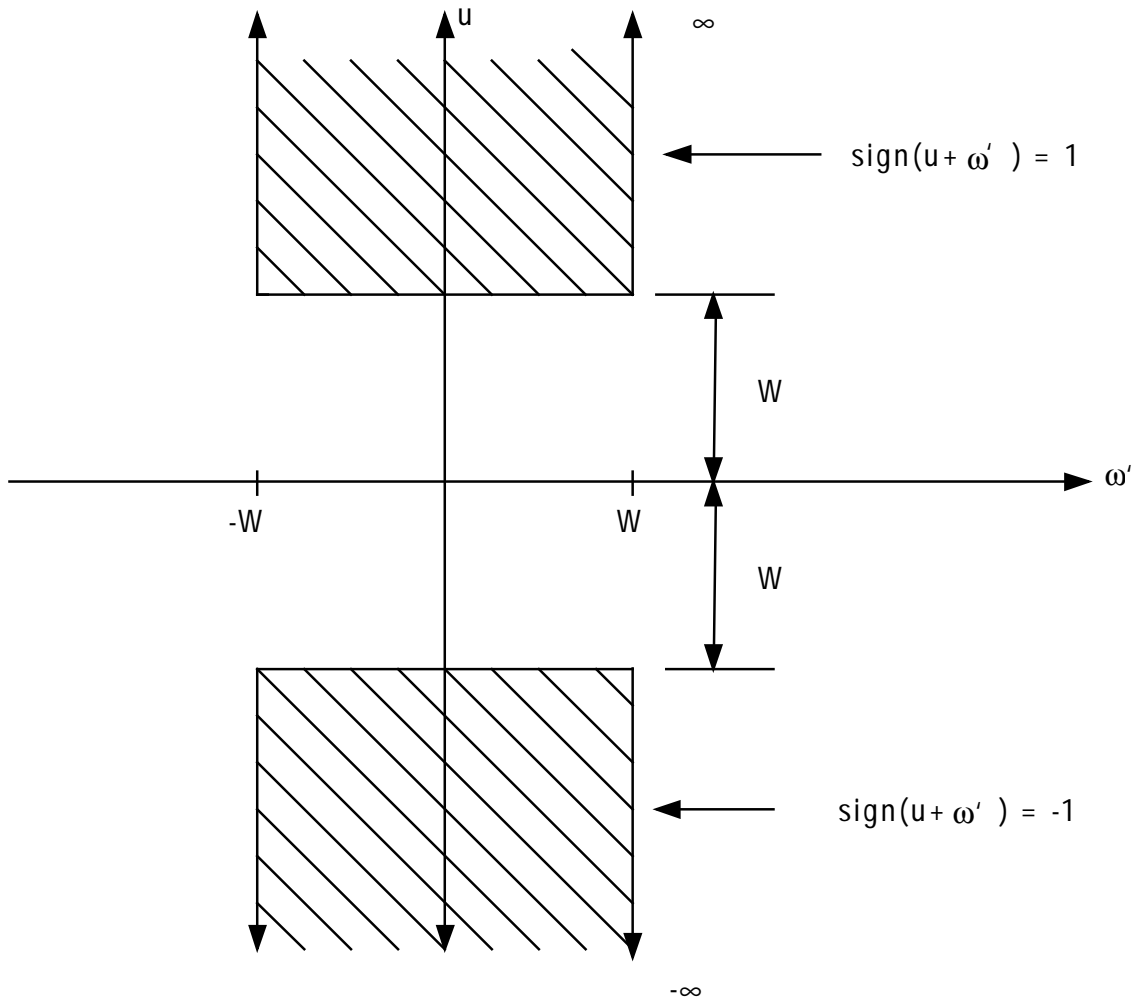
y la transformada de Hilbert

$$\begin{aligned} \hat{X}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -j\text{sign}(\omega) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega-\omega') B(\omega') d\omega' \right] e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} -j\text{sign}(\omega) A(\omega-\omega') B(\omega') e^{j\omega t} d\omega d\omega' \end{aligned}$$

Realizando el cambio $u = \omega - \omega'$

$$\hat{X}(t) = \frac{-j}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(u+\omega') A(u) B(\omega') e^{j(\omega'+u)t} du d\omega'$$

El producto $A(u) B(\omega')$ sólo está definido en las franjas rayadas de la figura en el plano $u-\omega'$.



Puesto que

$$\text{sign}(u + \omega') = \begin{cases} 1 & u + \omega' > 0 \\ -1 & u + \omega' < 0 \end{cases}$$

se verifica que

$$\text{sign}(u + \omega') = \text{sign}(u)$$

En las franjas rayadas, luego

$$\hat{X}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega') e^{j\omega't} d\omega' - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(u) A(u) e^{jut} du$$

Concluyendo

$$\hat{z}(t) = \hat{a}(t) b(t)$$

VI.6.- PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE HILBERT

VI.6.1.- LINEALIDAD

Sea $z(t) = x(t) + y(t)$

$$\hat{z}(t) = \hat{x}(t) + \hat{y}(t)$$

se deduce de la linealidad de la convolución

$$\hat{z}(t) = [\hat{x}(t) + \hat{y}(t)] * \frac{1}{\pi t}$$

VI.6.2.- AUTOCORRELACION Y ESPECTRO DE LA TRANSFORMADA DE HILBERT

La función de autocorrelación será

$$\begin{aligned} R_{\hat{x}\hat{x}}(\tau) &= \hat{x}(\tau) * \hat{x}^*(-\tau) \\ &= x(\tau) * \frac{1}{\pi t} * x^*(-\tau) \frac{1}{-\pi t} \\ &= x(\tau) * x^*(-\tau) * \frac{1}{\pi t} * \left(-\frac{1}{\pi t}\right) \\ &= x(\tau) * x^*(-\tau) * \delta(\tau) \\ &= x(\tau) * x^*(-\tau) = R_{xx}(\tau) \end{aligned}$$

Luego la transformada de Hilbert tiene la misma función de autocorrelación que la señal

$$R_{\hat{X}\hat{X}}(\tau) = R_{XX}(\tau)$$

y por lo tanto tendrá el mismo espectro. Por otro camino

$$S_{\hat{X}\hat{X}}(\omega) = |X(\omega)|^2 = |-j\text{sign}(\omega) X(\omega)|^2 = |X(\omega)|^2 = S_{XX}(\omega)$$

VI.6.3.- CORRELACION CRUZADA DE UNA SEÑAL Y SU TRANSFORMADA DE HILBERT

$$R_{X\hat{X}}(\tau) = x(\tau) * \hat{X}^*(-\tau) = x(\tau) * x^*(-\tau) * \left(-\frac{1}{\pi\tau}\right)$$

$$R_{X\hat{X}}(\tau) = -R_{XX} * \frac{1}{\pi\tau} = -\hat{R}_{XX}(\tau)$$

Análogamente

$$R_{\hat{X}X}(\tau) = \hat{R}_{XX}(\tau)$$

Y sus espectros cruzados

$$S_{\hat{X}X}(\omega) = -j\text{sign}(\omega) S_{XX}(\omega)$$

$$S_{X\hat{X}}(\omega) = j\text{sign}(\omega) S_{XX}(\omega)$$

VI.6.4.- RELACION DE ORTOGONALIDAD ENTRE UNA SEÑAL Y SU TRANSFORMADA DE HILBERT

Una señal $x(t)$ y su transformada de Hilbert son ortogonales, esto es

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) \hat{x}(t) dt = 0$$

Demostración :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) \hat{x}(t) dt = \text{PARSEVAL} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega) \hat{X}(\omega) d\omega =$$

$$= -j \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(\omega) |X(\omega)|^2 d\omega$$

Puesto que $|X(\omega)|^2$ es par la integral es cero.

VI.7.- TRANSFORMADA INVERSA DE HILBERT

La transformada inversa de Hilbert es

$$x(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{x}(\tau)}{t-\tau} d\tau$$

Demostración :

Sea $y(t) = \hat{x}(t)$

La transformada de Hilbert de $y(t)$ será

$$\begin{aligned} \hat{y}(t) &= y(t) * \frac{1}{\pi t} = \hat{x}(t) * \frac{1}{\pi t} \\ &= x(t) * \frac{1}{\pi t} * \frac{1}{\pi t} = x(t) * [-\delta(t)] \\ &= -x(t) \end{aligned}$$

También puede verse en el dominio de la frecuencia.

VI.8.- TRANSFORMADA DE HILBERT DE LA CONVOLUCION DE DOS SEÑALES

Sea $y(t) = x(t) * h(t)$

su transformada de Hilbert es

$$\hat{y}(t) = \frac{1}{\pi t} * y(t) = \frac{1}{\pi t} * x(t) * h(t)$$

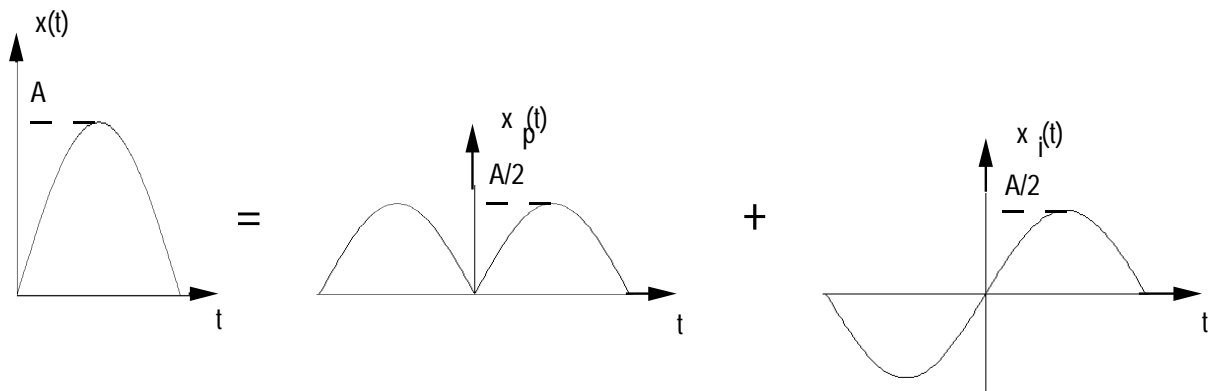
Luego

$$\mathcal{H} [x(t) * h(t)] = \hat{x}(t) * h(t) = x(t) * \hat{h}(t)$$

VI.9.- SEÑALES CAUSALES Y TRANSFORMADA DE HILBERT

Por ser señales reales puede escribirse

$$x(t) = x_p(t) + x_i(t)$$



y como se ha visto anteriormente se cumple que

$$R(\omega) = F[x_p(t)]$$

$$jI(\omega) = F[x_i(t)]$$

En el caso de ser causal se cumple además (ver figura)

$$x_p(t) = x_i(t) \operatorname{sign}(t)$$

$$x_i(t) = x_p(t) \operatorname{sign}(t)$$

Transformando la segunda

$$jI(\omega) = \frac{1}{2\pi} R(\omega) * \frac{2}{j\omega}$$

Luego la parte imaginaria es la transformada inversa de Hilbert de la parte real

$$I(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega'$$

Análogamente, transformando la primera

$$R(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega' \quad \text{T Hilbert Directa}$$

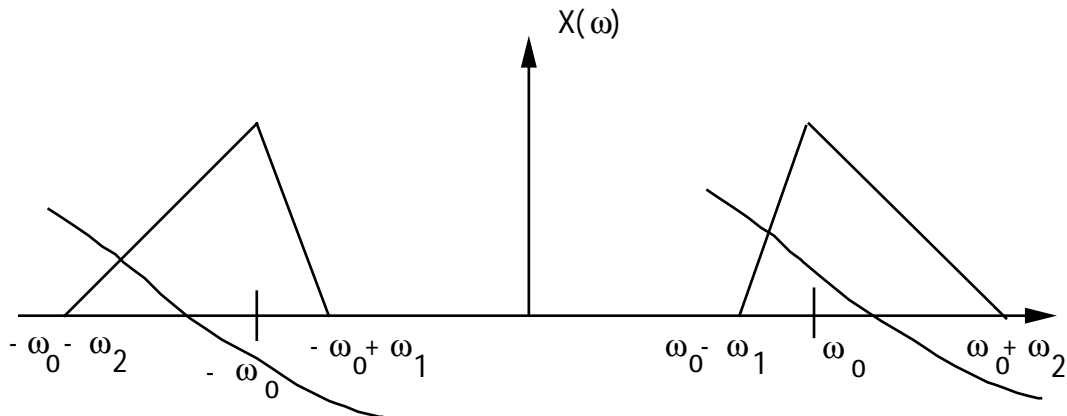
Esta última sólo es cierta si no hay impulsos en el origen de $x(t)$. Si $x(t) = x'(t) + k\delta(t)$, el impulso estará presente en $x_p(t)$, pero no en $x_i(t)$. Además

$R(\omega) \rightarrow k$. En este caso, la relación segunda se modificará dando:
 $\omega \rightarrow \infty$

$$R(\omega) = R(\infty) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega' \quad R(\infty) = k$$

VI.10.- SEÑALES PASO BANDA

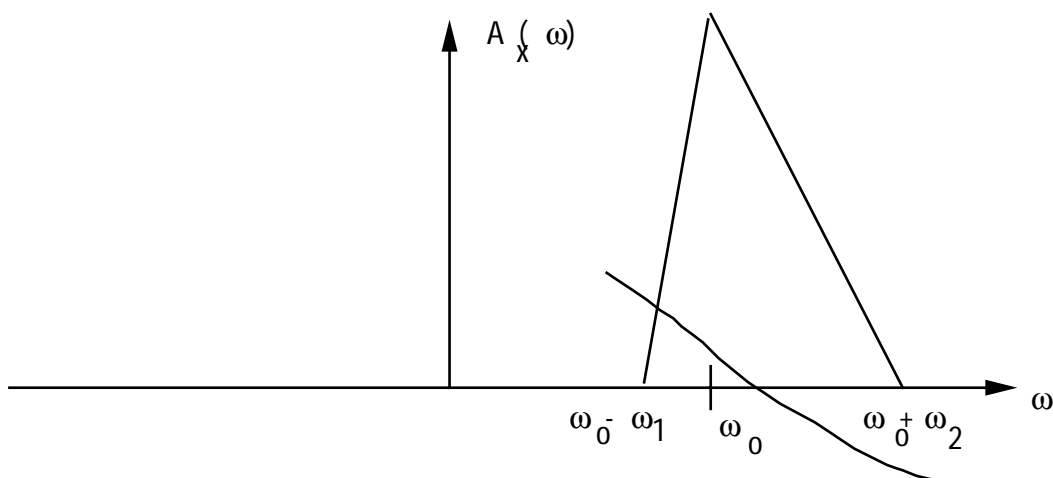
Se denomina señal paso banda a aquella cuya transformada de Fourier sólo existe en un determinado rango de frecuencias en la vecindad de alguna frecuencia f_0 que puede denominarse frecuencia central o portadora.



La pulsación ω_0 es arbitraria y no tiene que coincidir ni con la media aritmética ni con la geométrica de ω_1 y ω_2 .

La transformada de la señal analítica, según se ha definido anteriormente, es

$$A_X(\omega) = 2X(\omega) u(\omega)$$



En el dominio del tiempo

$$a_x(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$$

VI.11.- EQUIVALENTE PASO BAJO

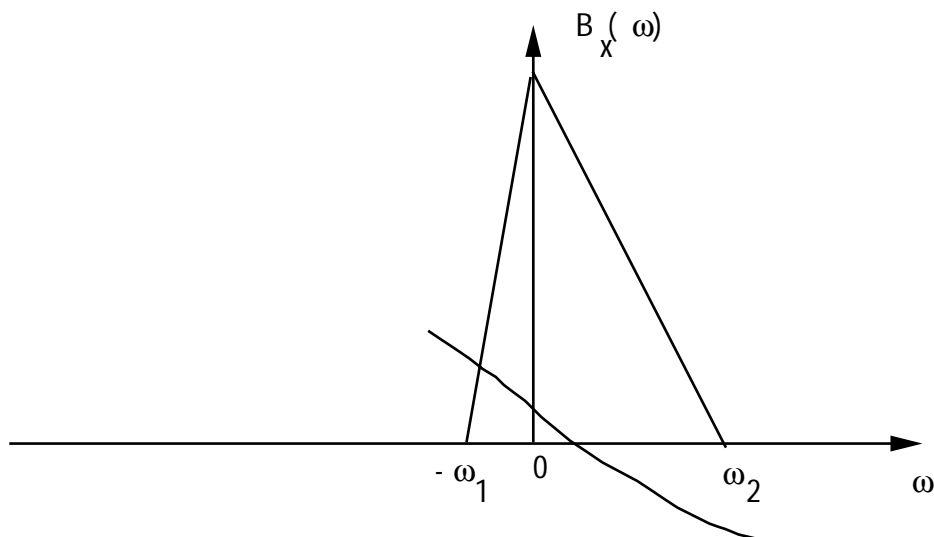
La señal analítica puede interpretarse como el resultado de desplazar en frecuencias (modular) una señal $B_x(\omega)$ paso bajo, esto es,

Dominio del tiempo

$$a_x(t) = b_x(t) e^{j\omega_0 t}$$

Dominio de la frecuencia

$$A_x(\omega) = B_x(\omega - \omega_0)$$



La señal $b_x(t)$ se le denomina equivalente paso bajo de $a_x(t)$ o $x(t)$. Es compleja y permite obtener $x(t)$ y $\hat{x}(t)$ como :

$$x(t) = \text{Re} \left[b_x(t) e^{j\omega_0 t} \right]$$

$$\hat{x}(t) = \text{Im} \left[b_x(t) e^{j\omega_0 t} \right]$$

VI.12.- SEÑALES SIMÉTRICAS Y ANTISIMÉTRICAS

Si $X(\omega)$ es hermítica alrededor de ω_0 , es decir, si $|X(\omega)|$ tiene simetría par y $\varphi_x(\omega)$ impar alrededor de ω_0 , entonces $B_x(\omega)$ tendrá la misma simetría alrededor del origen y $b_x(t)$ será real.

En este caso

$$x(t) = b_x(t) \cos \omega_0 t$$

$$\hat{x}(t) = b_x(t) \text{sen} \omega_0 t$$

Análogamente si $X(\omega)$ es antihermítica alrededor de ω_0 , es decir, $X(\omega_0 - \omega) = -X^*(\omega_0 + \omega)$, $B_x(\omega)$ tendrá la misma simetría alrededor del origen y $b_x(t)$ será imaginaria pura. En este caso

$$x(t) = -jb_x'(t) \text{sen} \omega_0 t$$

$$b_x(t) = jb_x'(t)$$

$$\hat{x}(t) = b_x'(t) \cos \omega_0 t$$

Estas ideas que simplifican el manejo de $b_x(t)$ y por tanto de $x(t)$, deben tenerse presentes a la hora de elegir ω_0 en un problema concreto.

VI.13.- COMPONENTES EN FASE Y CUADRATURA

Si la señal equivalente paso bajo se especifica por su parte real e imaginaria

$$b_x(t) = i_x(t) + jq_x(t)$$

se obtiene una representación peculiar para $x(t)$ en función de dos señales paso bajo

$$x(t) = i_x(t) \cos \omega_0 t - q_x(t) \sin \omega_0 t = \operatorname{Re} [b_x(t) e^{j\omega_0 t}]$$

$i_x(t)$, $q_x(t)$ son las señales paso bajo

Análogamente la transformada de Hilbert

$$\hat{x}(t) = i_x(t) \sin \omega_0 t + q_x(t) \cos \omega_0 t = \operatorname{Im} [b_x(t) e^{j\omega_0 t}]$$

La envolvente de la señal paso banda será

$$e_x(t) = |a_x(t)| = |b_x(t)| = \sqrt{i_x^2(t) + q_x^2(t)}$$

y la fase instantánea

$$\varphi_x(t) = \omega_0 t + \varphi_{bx}(t)$$

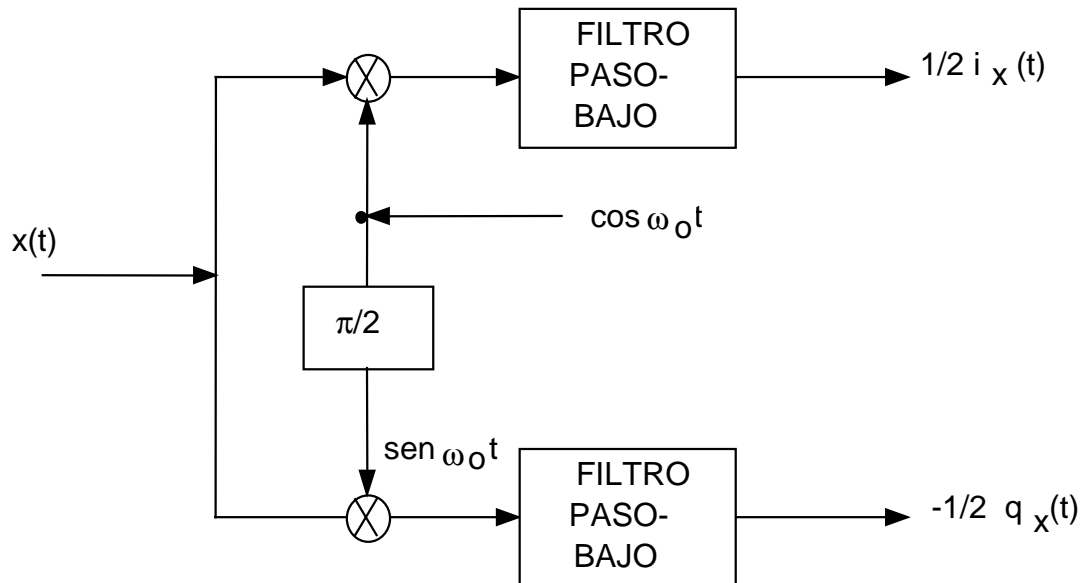
con

$$\varphi_{bx}(t) = \operatorname{arctg} \frac{q_x(t)}{i_x(t)}$$

Las señales paso bajo $i_x(t)$ y $q_x(t)$ se denominan componentes en fase y cuadratura, respectivamente.

La expresión de la transformada de Hilbert de una señal paso banda en función de las componentes en fase y cuadratura permite implementar dicha transformada de una manera eficiente y exacta.

La obtención de las componentes en fase y cuadratura a partir de la señal paso banda puede obtenerse mediante el esquema de la figura.



VI.14.- RETARDOS DE FASE Y DE GRUPO

Estos términos son usados para describir los retardos que sufren las diferentes partes de una señal paso banda, de banda estrecha, cuando pasa a través de un sistema lineal paso banda con pequeña distorsión de fase. Dichos términos carecen de significado en sistemas de banda ancha.

Sea $x(t)$ una señal paso banda que por simplicidad supondremos hermítica en torno a la frecuencia central ω_0

$$x(t) = b_x(t) \cos \omega_0 t$$

En este caso, como se ha visto, la señal paso bajo es real y su transformada hermítica en torno del origen, limitada a

$$|\omega| \leq \omega_c$$

La señal paso banda se dice que es banda-estrecha si se verifica que

$$\omega_c / \omega_0 \ll 1$$

Sea ahora un sistema paso banda

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\phi_H(\omega)}$$

tal que la amplitud es prácticamente constante en la banda de la señal

$$|H(\omega)| \cong |H(\omega_0)| \quad \omega_0 - \omega_c < |\omega| < \omega_0 + \omega_c$$

y la fase puede aproximarse por una recta de acuerdo con el desarrollo en serie de Taylor.

$$\phi_H(\omega) \cong \phi_H(\omega_0) + (\omega - \omega_0) \left. \frac{d\phi_H(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega = \omega_0}$$

Definiendo el retardo de fase y de grupo como sigue

$$t_{ph} = - \frac{\phi_H(\omega_0)}{\omega_0}$$

$$t_{gr} = - \left. \frac{d\phi_H(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega = \omega_0}$$

La transformada de la señal analítica correspondiente al sistema paso banda será

$$A_H(\omega) = 2|H(\omega_0)| e^{-j\omega_0 t_{ph}} e^{-j(\omega-\omega_0) t_{gr}} u(\omega)$$

La transformada de la señal analítica de $x(t)$ es

$$A_X(\omega) = B_X(\omega - \omega_0)$$

y por tanto la transformada de la señal analítica de salida será

$$A_Y(\omega) = \frac{1}{2} A_X(\omega) A_H(\omega) = |H(\omega_0)| e^{-j\omega_0 t_{ph}} B_X(\omega - \omega_0) e^{-j(\omega - \omega_0) t_{gr}} u(\omega)$$

La señal analítica será la transformada inversa

$$a_Y(t) = |H(\omega_0)| e^{-j\omega_0 t_{ph}} b_X(t - t_{gr}) e^{j\omega_0 t}$$

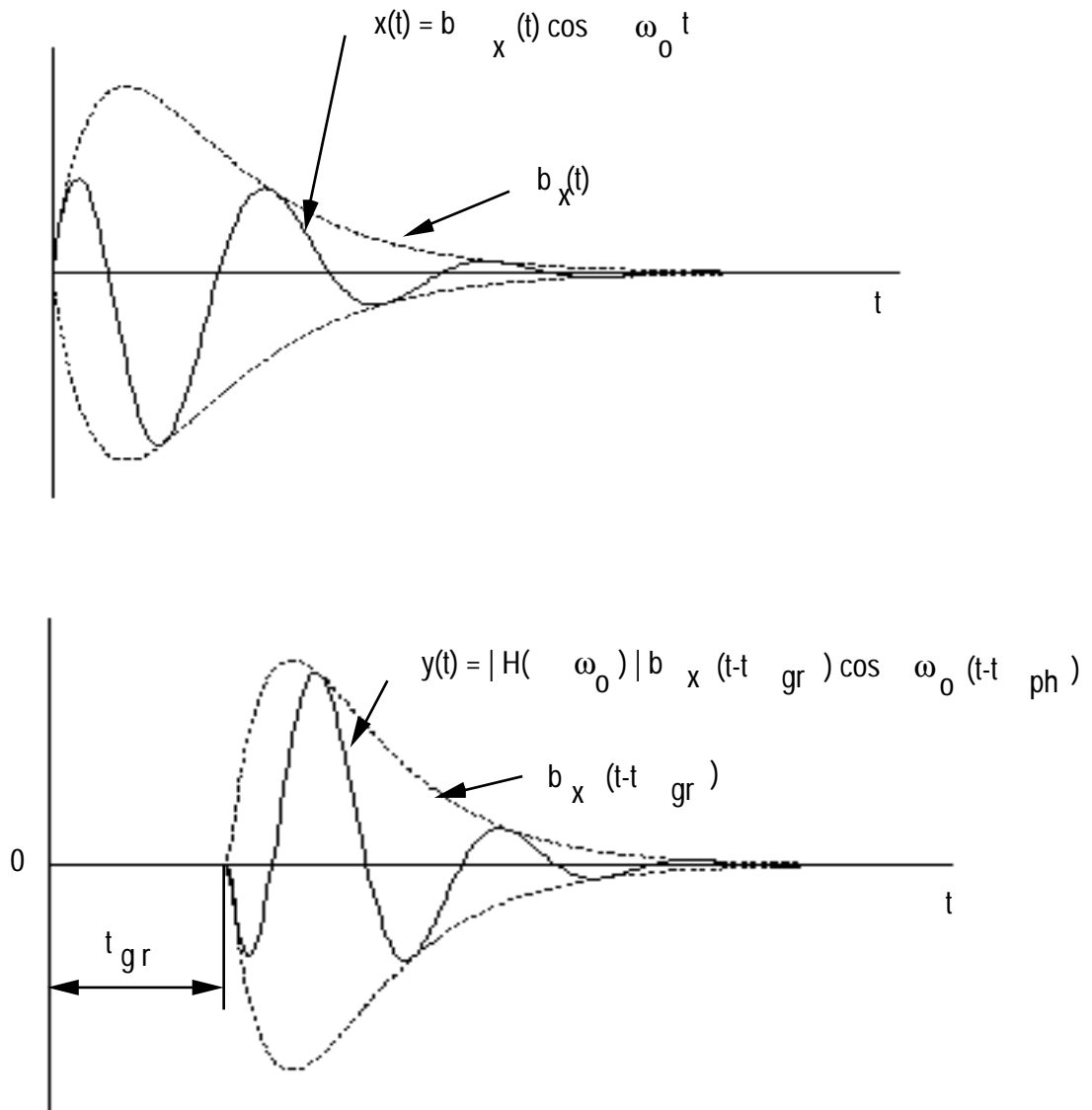
Luego la señal de salida será

$$y(t) = \text{Re} [a_Y(t)] = |H(\omega_0)| b_X(t - t_{gr}) \cos \omega_0(t - t_{ph})$$

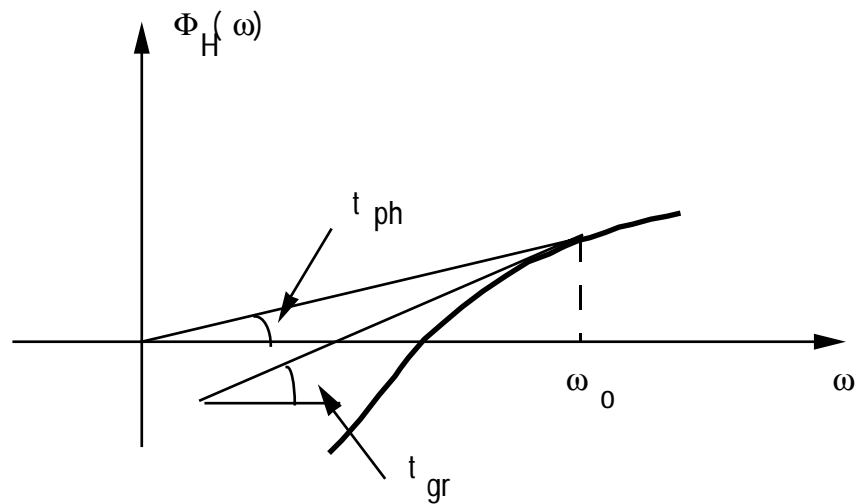
CONCLUSION

El retardo de grupo evaluado en la frecuencia central es el retardo de la equivalente paso bajo de la entrada y el retardo de fase es el retardo de portadora.

En las figuras siguientes pueden observarse ambos retardos en una señal paso banda.

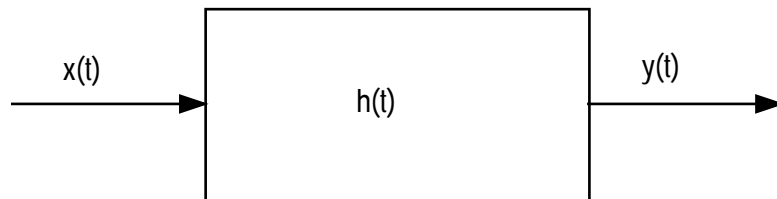


En la figura pueden observarse gráficamente los retardos de grupo y fase. Estos son las tangentes de los ángulos representados.



VI.15.- FILTRADO EQUIVALENTE PASO BAJO

Sea el sistema $h(t)$ paso banda



Este sistema puede diseñarse con tecnología de baja frecuencia usando leve circuitería adicional.

Puesto que entre las señales analíticas existe la relación

$$a_y(t) = \frac{1}{2} a_x(t) * a_h(t)$$

La misma relación se tendrá para las señales paso bajo

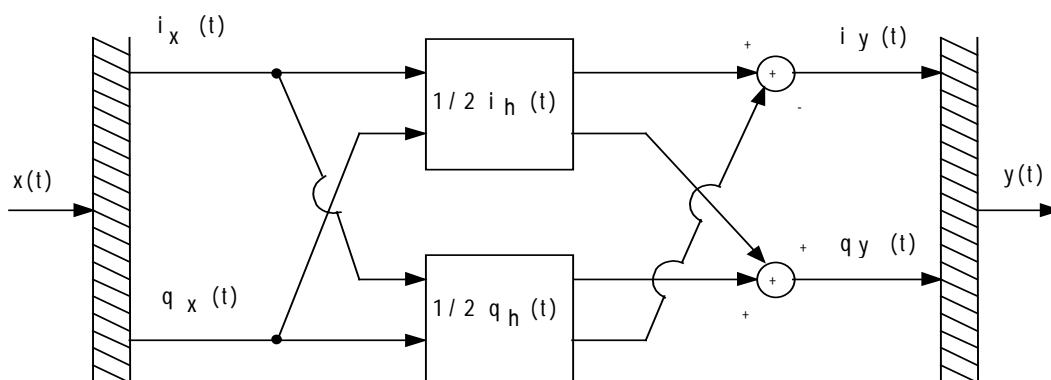
$$b_y(t) = \frac{1}{2} b_x(t) * b_h(t)$$

De este modo puede escribirse, después de sustituir los equivalentes paso bajo por sus componentes en fase y cuadratura, que:

$$i_y(t) = \frac{1}{2} [(i_x(t) * i_h(t) - q_x(t) * q_h(t)]$$

$$q_y(t) = \frac{1}{2} [i_x(t) * q_h(t) + q_x(t) * i_h(t)]$$

Por tanto el sistema paso bajo que se implementaría entre $x(t)$ e $y(t)$ sería



Este sistema, usado tradicionalmente en sistemas radar, sobre el papel solucionaría el procesado en radio frecuencia con tecnología de baja frecuencia, el problema radica en que la realizabilidad de $h(t)$ no garantiza la de $i_h(t)$ o $q_h(t)$ lo que conduciría solo a soluciones aproximadas de $h(t)$.

VI.16.- REPRESENTACION FASORIAL DE SEÑALES PASO BANDA

Todas las señales que intervienen en la representación de señales paso banda

$$b_x(t) = i_x(t) + jq_x(t)$$

$$a_x(t) = b_x(t) e^{j\omega_0 t} = x(t) + j\hat{x}(t)$$

$$x(t) = \text{Re} [a_x(t)] = |b_x(t)| \cos [\omega_0 t + \phi_{b_x}(t)] =$$

$$= i_x(t) \cos \omega_0 t - q_x(t) \text{sen} \omega_0 t$$

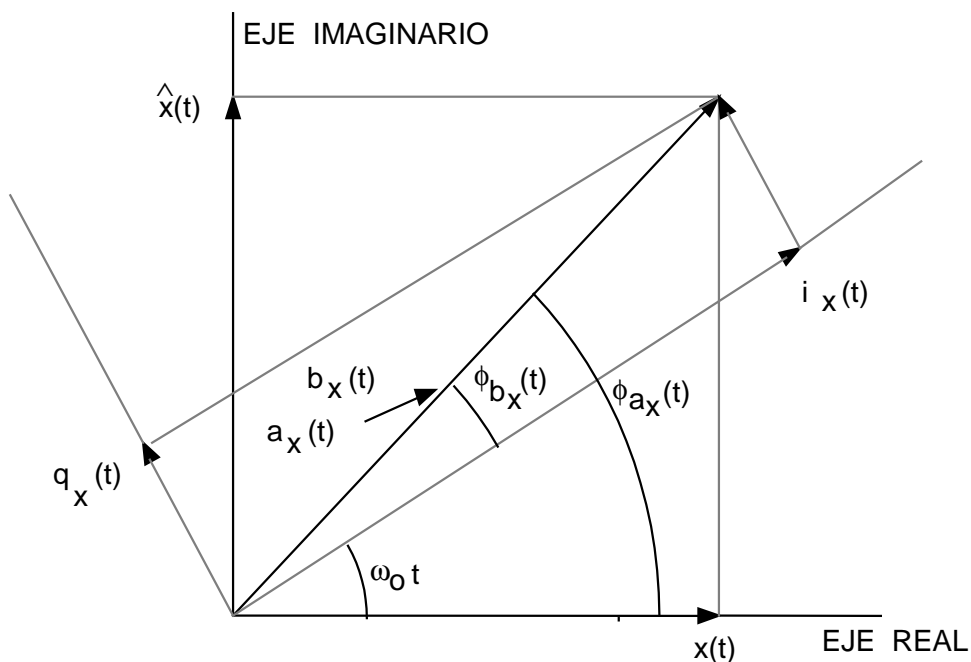
$$\hat{x}(t) = \text{Im} [a_x(t)] = |b_x(t)| \text{sen} [\omega_0 t + \phi_{b_x}(t)] =$$

$$= i_x(t) \text{sen} \omega_0 t + q_x(t) \cos \omega_0 t$$

$$e_x(t) = |a_x(t)| = |b_x(t)| = \sqrt{x^2(t) + \hat{x}^2(t)} = \sqrt{i_x^2(t) + q_x^2(t)}$$

$$\phi_x(t) = \omega_0 t + \phi_{b_x}(t) = \omega_0 t + \text{arctg} \frac{q_x(t)}{i_x(t)} = \text{arctg} \frac{\hat{x}(t)}{x(t)} = \phi_{a_x}(t)$$

Pueden representarse en el plano complejo como en la figura



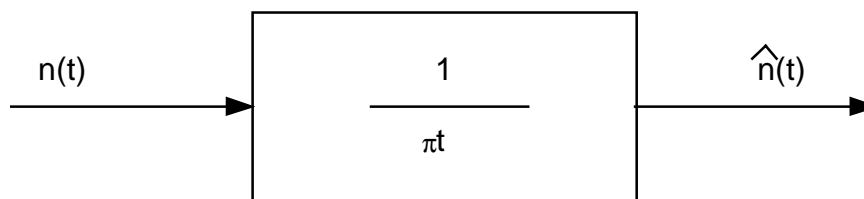
En realidad se trata de dos planos complejos superpuestos, donde el correspondiente a las señales equivalentes paso bajo se ha girado un ángulo $\omega_0 t$ en sentido contrario a las agujas de reloj para mayor claridad.

VI.17.- REPRESENTACION DE PROCESOS ESTACIONARIOS PASO-BANDA

Sea $n(t)$ un proceso aleatorio estacionario paso-banda. El proceso analítico correspondiente puede representarse como

$$a_n(t) = n(t) + j\hat{n}(t)$$

siendo $\hat{n}(t)$ la transformada de Hilbert del proceso $n(t)$, esto es, el proceso de salida del siguiente sistema



$$\hat{n}(t) = n(t) * \frac{1}{\pi t}$$

Como en señales determinísticas, el proceso analítico puede escribirse como :

$$a_n(t) = b_n(t) e^{j\omega_0 t}$$

$b_n(t)$, como se verá más adelante, es el proceso paso-bajo equivalente

$$b_n(t) = i_n(t) + jq_n(t)$$

de las expresiones anteriores puede establecerse

$$i_n(t) + jq_n(t) = [n(t) + j\hat{n}(t)] e^{-j\omega_0 t}$$

de forma que los procesos fase y cuadratura en función del proceso paso banda tienen las expresiones siguientes :

$$i_n(t) = n(t) \cos\omega_0 t + \hat{n}(t) \operatorname{sen}\omega_0 t$$

$$q_n(t) = \hat{n}(t) \cos\omega_0 t - n(t) \operatorname{sen}\omega_0 t$$

Las relaciones inversas son :

$$n(t) = i_n(t) \cos\omega_0 t - q_n(t) \operatorname{sen}\omega_0 t$$

$$\hat{n}(t) = q_n(t) \cos\omega_0 t + i_n(t) \operatorname{sen}\omega_0 t$$

VI.17.1.- AUTOCORRELACION Y CORRELACION CRUZADA DE LOS PROCESOS FASE Y CUADRATURA

Si el proceso paso-banda $n(t)$ es estacionario, vamos a demostrar que los procesos fase y cuadratura también son estacionarios. La autocorrelación del proceso fase es

$$R_{i_n i_n}(t+\tau, t) = E\{i_n(t+\tau)i_n(t)\}$$

Sustituyendo $i_n(t)$

$$R_{i_n i_n}(t+\tau, t) = E\left\{[n(t+\tau) \cos\omega_0(t+\tau) + \hat{n}(t+\tau) \operatorname{sen}\omega_0(t+\tau)]\right\}$$

$$\left[n(t) \cos \omega_0 t + \hat{n}(t) \sin \omega_0 t \right]$$

Desarrollando el producto

$$\begin{aligned} R_{i_n i_n}(t+\tau, t) &= E\{n(t+\tau) n(t)\} \cos \omega_0(t+\tau) \cos \omega_0 t + \\ &E\{n(t+\tau) \hat{n}(t)\} \cos \omega_0(t+\tau) \sin \omega_0 t + \\ &E\{\hat{n}(t+\tau) n(t)\} \sin \omega_0(t+\tau) \cos \omega_0 t + \\ &E\{\hat{n}(t+\tau) \hat{n}(t)\} \sin \omega_0(t+\tau) \sin \omega_0 t \end{aligned}$$

La esperanza correspondiente al primer sumando es la autocorrelación del proceso paso-banda.

$$R_{nn}(\tau) = E\{n(t+\tau) n(t)\}$$

La del segundo sumando es

$$\begin{aligned} R_{n\hat{n}}(\tau) &= E\{n(t+\tau) \hat{n}(t)\} = E\left\{n(t+\tau) n(t) * \frac{1}{\pi t}\right\} \\ &= E\left\{n(t+\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n(\alpha) d\alpha}{t-\alpha}\right\} \end{aligned}$$

Introduciendo $n(t+\tau)$ dentro de la integral e intercambiando la esperanza con la integral.

$$R_{n\hat{n}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E\{n(t+\tau)n(\alpha)\}}{t-\alpha} d\alpha =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_{nn}(t+\tau - \alpha)}{t-\alpha} d\alpha$$

Realizando el cambio de variable $t+\tau-\alpha = u$ se obtiene

$$R_{n\hat{n}}(\tau) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_{nn}(u)}{\tau-u} du = -R_{nn}(\tau)$$

De manera análoga puede obtenerse para los otros dos sumandos

$$R_{\hat{n}n}(\tau) = E\{\hat{n}(t+\tau)n(t)\} = R_{nn}(\tau)$$

$$R_{\hat{n}\hat{n}}(\tau) = E\{\hat{n}(t+\tau)\hat{n}(t)\} = R_{nn}(\tau)$$

Relaciones completamente idénticas a las correspondientes a señales determinísticas.

Haciendo uso de las relaciones trigonométricas

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A-B) + \cos(A+B)]$$

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2} [\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A-B) + \sin(A+B)]$$

Se obtiene finalmente la autocorrelación

$$R_{i_n i_n}(t+\tau, t) = R_{nn}(\tau) \cos \omega_0 \tau + R_{nn}(\tau) \sin \omega_0 \tau = R_{i_n i_n}(\tau)$$

que sólo depende de τ .

La autocorrelación del proceso cuadratura y la correlación cruzada de los procesos fase y cuadratura pueden obtenerse de manera análoga.

$$R_{q_n q_n}(\tau) = R_{i_n i_n}(\tau)$$

$$R_{q_n i_n}(\tau) = R_{nn}(\tau) \cos \omega_0 \tau - R_{ni_n}(\tau) \sin \omega_0 \tau$$

$$R_{i_n q_n}(\tau) = -R_{q_n i_n}(\tau)$$

Multiplicando $R_{i_n i_n}(\tau)$ por $\cos \omega_0 \tau$ ($\sin \omega_0 \tau$) y $R_{q_n i_n}(\tau)$ por $\sin \omega_0 \tau$ ($\cos \omega_0 \tau$) y restando (sumando) se obtienen las relaciones inversas

$$R_{nn}(\tau) = R_{i_n i_n}(\tau) \cos \omega_0 \tau - R_{q_n i_n}(\tau) \sin \omega_0 \tau$$

$$R_{nn}(\tau) = R_{q_n i_n}(\tau) \cos \omega_0 \tau + R_{i_n i_n}(\tau) \sin \omega_0 \tau$$

Obsérvese que la correlación del proceso paso banda tiene la misma forma que una señal paso banda en la que la "SEÑAL EN FASE" es $R_{i_n i_n}(\tau) = R_{q_n q_n}(\tau)$ y la "SEÑAL EN CUADRATURA" es la correlación cruzada $R_{q_n i_n}(\tau) = -R_{i_n q_n}(\tau)$.

Las expresiones de $R_{i_n i_n}(\tau)$ y $R_{q_n i_n}(\tau)$ en función de $R_{nn}(\tau)$ y $R_{ni_n}(\tau)$ pueden obtenerse por el procedimiento señalando anteriormente, esto es, multiplicando por $\sin \omega_0 \tau$ ($\cos \omega_0 \tau$) y sumando (restando).

VI.17.2.- AUTOCORRELACION DEL PROCESO PASO BAJO

$$R_{b_n b_n}(\tau) = E\{b_n(t+\tau) b_n^*(t)\}$$

substituyendo $b_n(t)$

$$\begin{aligned} R_{b_n b_n}(\tau) &= E\{ [i_n(t+\tau) + jq_n(t+\tau)] [i_n(t) - jq_n(t)] \} \\ &= R_{i_n i_n}(\tau) - jR_{i_n q_n}(\tau) + jR_{q_n i_n}(\tau) + R_{q_n q_n}(\tau) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las propiedades obtenidas anteriormente :

$$R_{b_n b_n}(\tau) = 2[R_{i_n i_n}(\tau) + jR_{q_n i_n}(\tau)]$$

VI.17.3.- AUTOESPECTRO DE LOS PROCESOS FASE Y CUADRATURA

Tomando transformadas de Fourier en la autocorrelación del proceso en fase

$$\begin{aligned} S_{i_n i_n}(\omega) &= S_{q_n q_n}(\omega) = F[R_{i_n i_n}(\tau)] = \\ &= F[R_{nn}(\tau) \cos \omega_0 \tau + R_{nn}(\tau) \text{sen} \omega_0 \tau] \end{aligned}$$

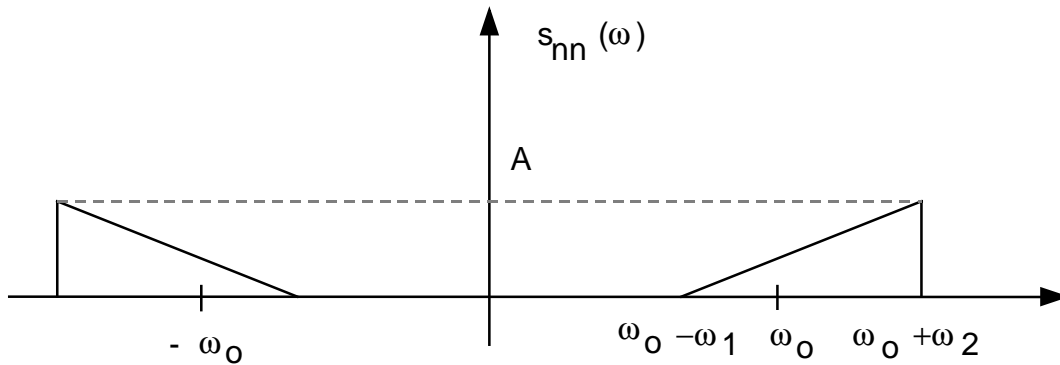
Teniendo en cuenta las propiedades de la transformada de Fourier y de Hilbert

$$\begin{aligned} S_{i_n i_n}(\omega) &= \frac{1}{2} [S_{nn}(\omega - \omega_0) + S_{nn}(\omega + \omega_0)] - \\ &- j \frac{1}{2} [-j \text{sign}(\omega - \omega_0) S_{nn}(\omega - \omega_0) + j \text{sign}(\omega + \omega_0) S_{nn}(\omega + \omega_0)] \\ &= \frac{1}{2} [1 - \text{sign}(\omega - \omega_0)] S_{nn}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} [(1 + \text{sign}(\omega + \omega_0))] S_{nn}(\omega + \omega_0) \end{aligned}$$

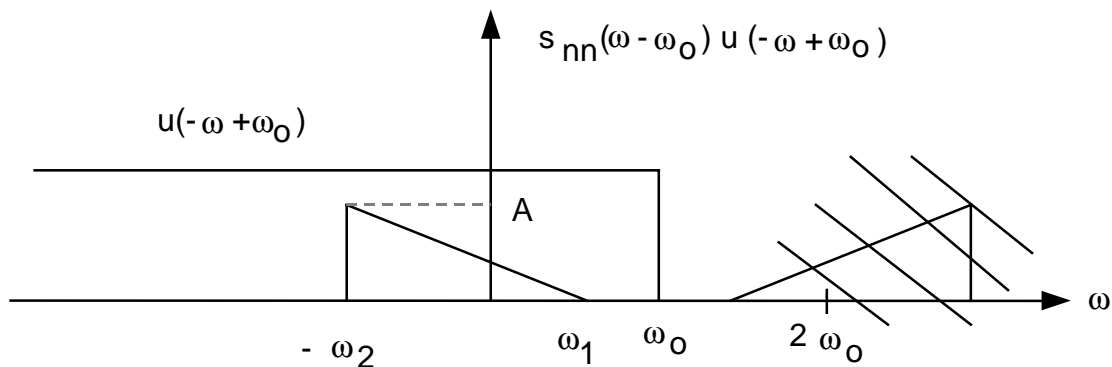
o bien

$$S_{i_{nn}}(\omega) = S_{nn}(\omega - \omega_0) u(-\omega + \omega_0) + S_{nn}(\omega + \omega_0) u(\omega + \omega_0)$$

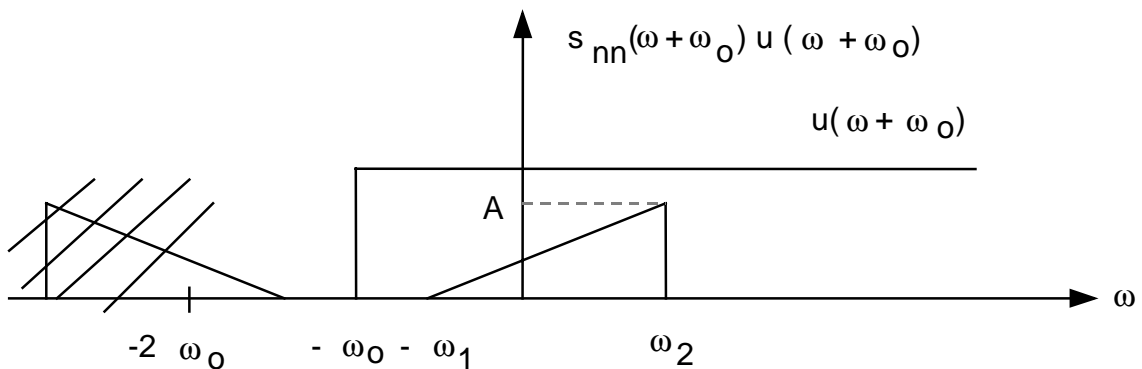
Expresión que tiene una interpretación gráfica sencilla. Sea el espectro de la señal paso banda el siguiente :



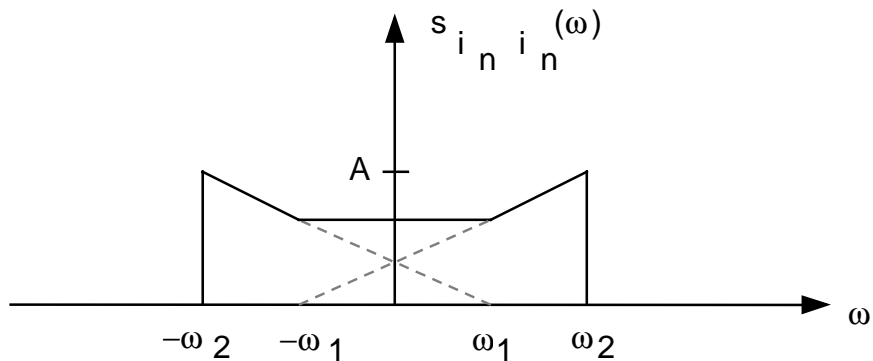
El primer sumando consiste en desplazar todo el espectro, a la derecha, la cantidad ω_0 y eliminar la parte centrada en $2\omega_0$



El segundo sumando realiza la operación contraria, desplaza el espectro, a la izquierda, la cantidad ω_0 y suprime la parte centrada en $-2\omega_0$.



El espectro final será la suma de los anteriores



VI.17.4.- ESPECTRO CRUZADO DE LAS SEÑALES FASE Y CUADRATURA

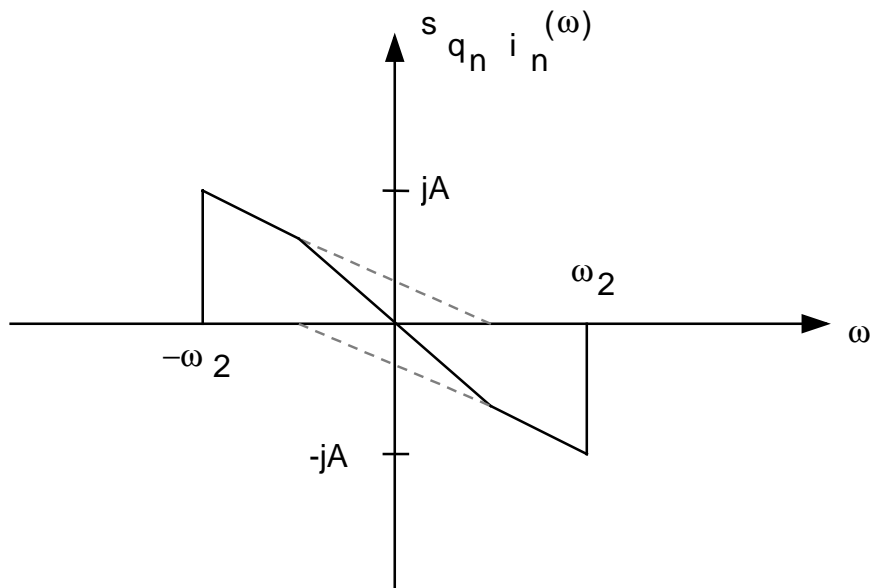
Siguiendo el mismo procedimiento del apartado anterior

$$\begin{aligned}
 S_{q_n i_n}(\omega) &= F[R_{q_n i_n}(\tau)] = \\
 &= F[A_{nn}(\tau) \cos \omega_0 \tau - R_{nn}(\tau) \operatorname{sen} \omega_0 \tau] \\
 &= \frac{1}{2} [-j \operatorname{sign}(\omega - \omega_0) S_{nn}(\omega - \omega_0) - j \operatorname{sign}(\omega + \omega_0) S_{nn}(\omega + \omega_0)] \\
 &\quad + j \frac{1}{2} [S_{nn}(\omega - \omega_0) - S_{nn}(\omega + \omega_0)] \\
 &= j \frac{1}{2} [1 - \operatorname{sign}(\omega - \omega_0)] S_{nn}(\omega - \omega_0) - j \frac{1}{2} [1 + \operatorname{sign}(\omega + \omega_0)] S_{nn}(\omega + \omega_0)
 \end{aligned}$$

o bien

$$S_{q_n i_n}(\omega) = j S_{nn}(\omega - \omega_0) u(-\omega + \omega_0) - j S_{nn}(\omega + \omega_0) u(\omega + \omega_0)$$

Gráficamente, para la misma señal anterior



VI.17.5.- ESPECTROS DEL PROCESO BAJO Y DEL PROCESO ANALITICO

El espectro del proceso paso bajo será

$$S_{b_n b_n}(\omega) = 2[S_{i_n i_n}(\omega) + jS_{q_n i_n}(\omega)]$$

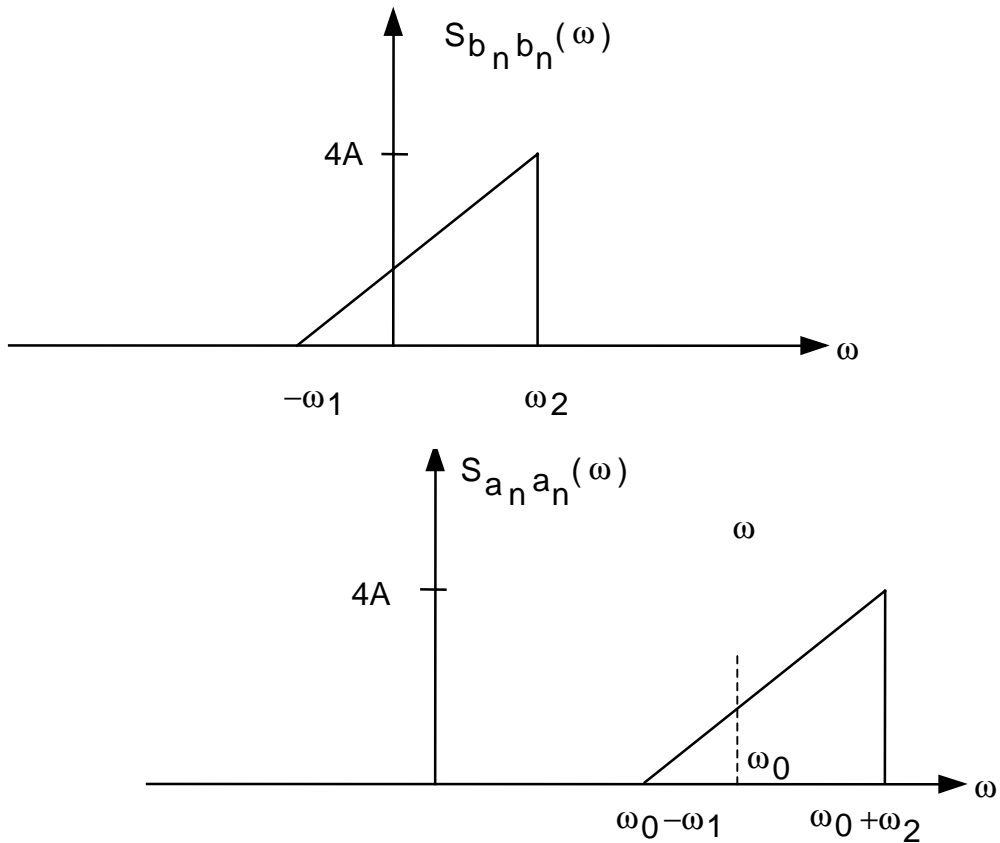
Sustituyendo los espectros calculados anteriormente queda

$$S_{b_n b_n}(\omega) = 4S_{nn}(\omega + \omega_0) u(\omega + \omega_0)$$

El espectro del proceso analítico vendrá dado por

$$S_{a_n a_n}(\omega) = S_{b_n b_n}(\omega - \omega_0) = 4S_{nn}(\omega) u(\omega)$$

Gráficamente



VI.17.6.- PROPIEDADES DE LAS COMPONENTES FASE Y CUADRARATURA DE LA AUTOCORRELACION DEL PROCESO PASO BANDA.

Se ha visto anteriormente que

$$R_{i_n q_n}(\tau) = -R_{q_n i_n}(\tau)$$

pero al ser $q_n(t)$ e $i_n(t)$ reales, de la propia definición de correlación cruzada se deduce

$$R_{i_n q_n}(\tau) = R_{q_n i_n}(-\tau)$$

Luego

$$R_{i_n q_n}(\tau) = -R_{i_n q_n}(-\tau)$$

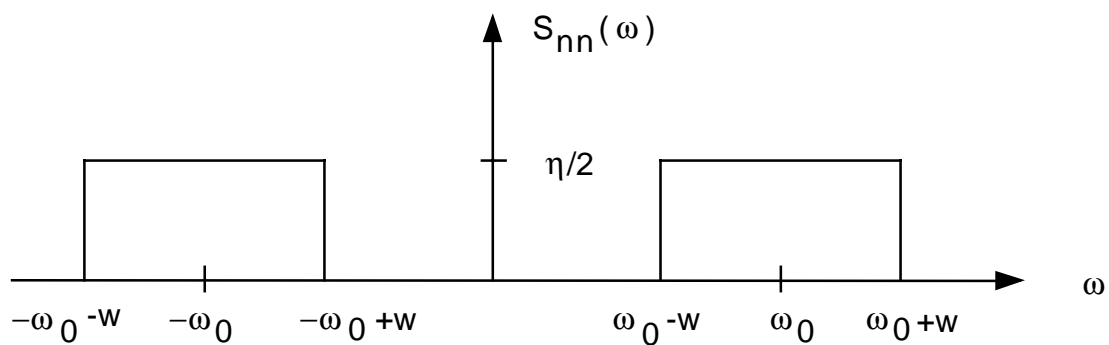
de donde se concluye que la correlación cruzada es una función impar. Esta propiedad también puede deducirse del espectro cruzado de ambas señales (imaginario puro).

La potencia de las señales fase y cuadratura

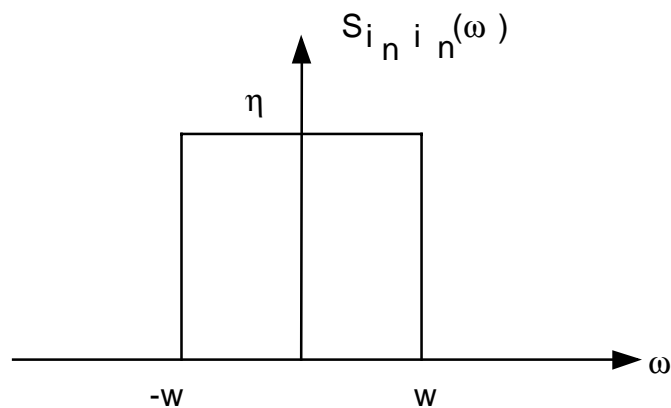
$$P_{i_n} = P_{q_n} = R_{i_n i_n}(0) = R_{q_n q_n}(0) = R_{nn}(0) = P_n$$

es la misma que la del proceso paso banda.

VI.18.- RUIDO BLANCO PASO BANDA



Por estar centrado en ω_0 , la correlación cruzada y el espectro cruzado de los procesos fase y cuadratura son nulos. El autoespectro de ambos procesos será



VI.19.- PROCESOS PASO-BANDA NO ESTACIONARIOS

Hemos visto en el apartado anterior que si un proceso paso-banda es estacionario, el proceso paso-bajo y los procesos en fase i en cuadratura también lo son. El contrario no siempre es cierto. Sean $x(t)$ i $y(t)$ dos procesos banda base i sea

$$w(t) = x(t) \cos \omega_0 t - y(t) \sin \omega_0 t$$

Un proceso paso-banda tal que f_0 es más grande que la máxima frecuencia de los procesos paso-bajo, donde $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$. La correlación del proceso $w(t)$, de acuerdo con el apartado anterior, vendrá dada por

$$R_w(t, \tau) = E\{w(t+\tau)w(t)\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \left[R_{b_w}(t, \tau) + R_{b_w, b_w^*}(t, \tau) e^{j2\omega_0 t} \right] e^{j\omega_0 \tau} \right\}$$

Siendo $b_w(t)$ el proceso equivalente paso-bajo,

$$b_w(t) = x(t) + jy(t)$$

$R_{b_w}(t, \tau)$ es su correlación y $R_{b_w, b_w^*}(t, \tau)$ la correlación cruzada del proceso paso-bajo y su conjugado. Estas últimas valen

$$R_{b_w}(t, \tau) = R_x(t, \tau) + R_y(t, \tau) + j[R_{yx}(t, \tau) - R_{xy}(t, \tau)]$$

$$R_{b_w, b_w^*}(t, \tau) = R_x(t, \tau) - R_y(t, \tau) + j[R_{yx}(t, \tau) + R_{xy}(t, \tau)]$$

Por tanto, para que el proceso paso-bajo sea estacionario se ha de cumplir que $x(t)$ i $y(t)$ sean estacionarios y además que

$$R_x(\tau) = R_y(\tau) \quad \text{i} \quad R_{yx}(\tau) = -R_{xy}(\tau)$$

VI.19.1.- PROCESOS PASSA-BANDA AMB FASE ALEATORIA

Una manera de soslayar el problema de los procesos paso-banda no estacionarios es suponer que la portadora tiene una fase ϕ que es una variable aleatoria distribuida uniformemente en $[-\pi, \pi]$ e independiente de los procesos, es decir

$$w'(t) = x(t) \cos(\omega_0 t + \phi) - y(t) \sin(\omega_0 t + \phi)$$

En este caso el proceso paso-bajo será

$$b_w(t) = [x(t) + jy(t)]e^{j\phi} = b_w(t)e^{j\phi}$$

Su correlación

$$R_{b_w}(\tau) = E\{b'(t+\tau)b'^*(t)\} = R_{b_w}(\tau) = R_x(\tau) + R_y(\tau) + j[R_{yx}(\tau) - R_{xy}(\tau)]$$

y la correlación cruzada de $b_w(t)$ y su conjugado

$$R_{b_w, b_w^*}(\tau) = E\{b'(t+\tau)b'(t)\} = R_{b_w, b_w^*}(\tau)E\{e^{j2\phi}\} = 0$$

Por tanto el nuevo proceso es estacionario si los procesos $x(t)$ i $y(t)$ lo son.