Unidad Didáctica

Álgebra de Boole

FONDO FORMACION

Programa de Formación Abierta y Flexible

Obra colectiva de FONDO FORMACION

Coordinación *Servicio de Producción Didáctica de FONDO FORMACION (Dirección de Recursos)*

Diseño y maquetación *Servicio de Publicaciones de FONDO FORMACION*

© FONDO FORMACION - FPE

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, ni su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otro método, sin el permiso previo y por escrito de los titulares del Copyright.

Depósito Legal ***AS -1953-2001***

FONDO FORMACION

Unidad Didáctica Álgebra de Boole

El estudio de circuitos cuya característica es la de procesar señales que sólo tienen dos niveles, sin importar los valores precisos, con tal de que estén en un nivel u otro de los definidos, nos introduce de lleno en los circuitos lógicos o circuitos digitales.

El álgebra de Boole es la base matemática de la electrónica digital, que nos permite estudiar las funciones lógicas y su simplificación, para después implementarlas electrónicamente.

En esta unidad vamos a ver las bases del álgebra de conmutación, las definiciones básicas y sus fundamentos operativos.

En esta unidad, veremos los siguientes contenidos:

- Operaciones básicas.
- Propiedades.
- Teoremas.
- Función lógica.
- Términos canónicos.
- Tabla de verdad.
- Mapas de Karnaugh.

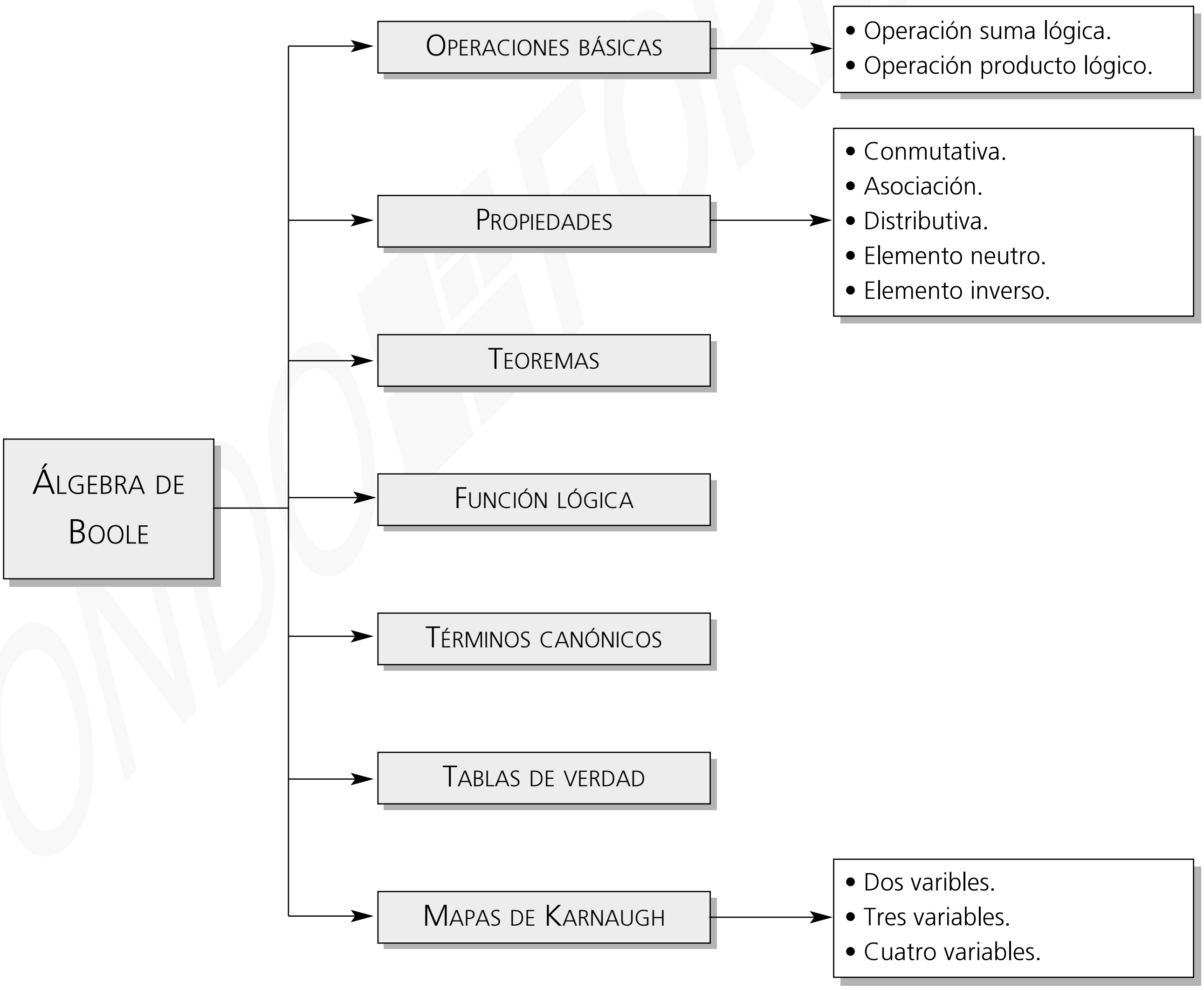
FONDO FORMACION

Tus objetivos

Al final de esta unidad serás capaz de:

- Realizar operaciones lógicas.
- Expresar una función lógica en forma canónica.
- Aplicar los teoremas del álgebra de Boole a una función lógica
- Simplificar una función lógica.
- Emplear los mapas de Karnaugh para simplificar funciones.

Esquema de estudio



Operaciones básicas

El álgebra de Boole opera solamente con dos valores que podemos interpretar como ‘abierto-cerrado‘, ‘si-no‘, ‘verdadero-falso‘. Por tener sólo dos estados perfectamente definidos se le denomina **lógica binaria** y es la base del análisis de los circuitos digitales.

En el álgebra de Boole se definen dos operaciones básicas que son la **suma** y el **producto.**

1. Operación suma lógica

En la operación de **suma lógica** el resultado es 0 si –y sólo si– las dos entradas son 0. Puedes verla en la tabla 1.

A y *B* representan las variables de entrada y *S* representa la salida, en este caso, la suma lógica.

Para leer la tabla dirás: “cero más cero, salida cero” para el primer caso y, lo mismo, para los demás. Observa que “uno más uno, salida uno”, en el último caso. Esto es así porque en un sistema binario sólo existen dos estados: **el cero** y **el uno.**

A	B	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Tabla1
Operación de suma lógica.

2. Operación producto lógico

En la operación **producto lógico** el resultado es 1, si –y sólo si– las dos entradas son 1. Puedes verla en la tabla 2.

Como antes, *A* y *B* representan las variables de entrada y *S* la salida, que en este caso es el producto lógico. Para leer la tabla dirás: “cero por cero, salida cero” para el primer caso, y lo mismo para el resto.

A	B	S
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tabla 2: Operación producto.

FONDO FORMACION

Propiedades

El álgebra de Boole cumple además las **propiedades** siguientes:

- **Conmutativa:**

$$A + B = B + A$$
$$A \cdot B = B \cdot A$$

- **Asociativa:**

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$
$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

- **Distributiva:**

$$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$$
$$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$$

- **Elemento neutro:**

$$A + 0 = A$$
$$A \cdot 1 = A$$

- **Elemento inverso:**

$$A + \overline{A} = 1$$
$$A \cdot \overline{A} = 0$$

Teoremas del álgebra de Boole

Para manipular expresiones *booleanas* es conveniente conocer las siguientes equivalencias y teoremas:

- **T1.** Para cualquier elemento A en un álgebra de Boole, se verifica que:

$$A = A + A$$
$$A = A \cdot A$$

- **T2.** Para cualquier elemento A en un álgebra de Boole, se verifica que:

$$A + 1 = 1$$
$$A \cdot 0 = 0$$

FONDO FORMACION

- **T3.** Para cualquier elemento *A* en un álgebra de Boole, se verifica que:

$$A + A \cdot B = A$$
$$A \cdot (A + B) = A$$

Se llama **Ley de absorción.**

- **T4.** Para todos los elementos de un álgebra de Boole se verifica que:

$$\overline{A + B + C + \ldots} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \ldots$$

$$\overline{A \cdot B \cdot C \cdot \ldots} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \ldots$$

Se conoce como **teorema de De Morgan.**

Función lógica

Cualquier correspondencia entre las variables de entrada y la salida de un circuito de conmutación combinacional* puede describirse mediante una función lógica.

Una misma función *booleana** puede representarse con diferentes expresiones que conducirán a circuitos de conmutación con distinta complejidad.

La expresión más simple nos llevará a un circuito más sencillo, por esto es importante la simplificación de funciones.

Dos expresiones *booleanas* son equivalentes si –y sólo si– describen la misma función.

Para simplificar funciones acudiremos a las propiedades y teoremas del álgebra de Boole.

Veamos un ejemplo de simplificación de funciones.

FONDO FORMACION

Ejemplo:

Simplificar la función de tres variables:

$$F = \overline{A} \cdot (B \cdot C + A \cdot C + \overline{A} \cdot B)$$

Aplicando la propiedad distributiva nos queda:

$$F = \overline{A} \cdot B \cdot C + \overline{A} \cdot A \cdot C + \overline{A} \cdot \overline{A} \cdot B$$

Mediante el elemento inverso y el teorema *T1* tenemos:

$$F = \overline{A} \cdot B \cdot C + \overline{A} \cdot B$$

Sacando factor común obtenemos:

$$F = \overline{A} \cdot B \cdot (C + 1)$$

Mediante el teorema *T2* nos queda:

$$F = \overline{A} \cdot B$$

Como ves la función inicial ha quedado simplificada.

Términos canónicos

Se llama **término canónico** de una función lógica a todo producto o suma en el cual aparecen todas las variables de esa función en forma directa o complementada (inversa).

A los términos producto se les llama **productos canónicos** o **minterms** y a los términos suma **sumas canónicas** o **maxterms.**

Decimos que una función se encuentra en forma canónica cuando está expresada como suma de productos canónicos (minterms) o como producto de sumas canónicas (maxterms).

La siguiente función está en forma canónica como suma de minterms:

$$F = A \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot C$$

La siguiente función está en forma canónica como producto de maxterms:

$$F = (A + B + C) \cdot (A + \overline{B} + \overline{C}) \cdot (\overline{A} + B + C)$$

La siguiente función no está en forma canónica:

$$F = A \cdot B + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + B \cdot C$$

ACTIVIDAD 1

Simplifica la siguiente función lógica:

$F = A \cdot B \cdot C + A \cdot B + \overline{A} \cdot B \cdot C + B \cdot C$

Tablas de verdad

La tabla de verdad de una función lógica es una forma de representar ésta en la que se indica el valor (0 ó 1) que toma para cada una de las combinaciones de valores de las variables de la función. De la tabla de verdad de una función lógica es fácil deducir los términos canónicos de la función.

Para pasar de la tabla de verdad a la función en términos canónicos, seguiremos los siguientes pasos:

- Consideramos los términos que hacen 1 la función para los minterms, y los que la hacen 0 para los maxterms.
- Para los minterms tomaremos la variable en forma directa si es 1, y de forma inversa si es 0.
- Para los maxterms tomamos la variable en forma directa si es 0, y en forma inversa si es 1.

Ejemplo:

Te mostramos la tabla de verdad de una función donde *C*, *B*, *A* son las variables de entrada y *F* es la función de salida. Vamos a obtener la función en forma de minterms y de maxterms.

C	B	A	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Tabla de verdad.

Tomando los términos canónicos que hacen 1, la función, y poniendo las variables en forma directa si son 1, y en forma inversa si son 0, obtenemos la función canónica en minterms:

$$F = \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot \overline{C}$$

Siguiendo el proceso para los maxterms, la función ahora queda así:

$$F = (C + B + A) \cdot (C + B + \overline{A}) \cdot (\overline{C} \cdot B \cdot A) \cdot$$

$$\cdot (\overline{C} + B + \overline{A}) \cdot (\overline{C} \cdot \overline{B} \cdot A) \cdot (\overline{C} + \overline{B} + \overline{A})$$

Las dos expresiones son equivalentes y, aunque pueda resultar más cómodo operar en minterms, no hay que olvidar que es posible hacerlo de las dos formas. Unas veces será conveniente hacerlo con minterms y otras con maxterms.

ACTIVIDAD 2

Dada la tabla de verdad, escribe la función en forma de minterms y simplifícala.

C	B	A	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Mapas de Karnaugh

La utilización de los postulados y teoremas del álgebra de Boole permite la simplificación de funciones lógicas pero no es un método sistemático para expresiones complejas. Por ello, como método sistemático vamos a utilizar los mapas de Karnaugh-Veitch.

Un **mapa de Karnaugh** es una forma de presentar la tabla de verdad, de tal manera que la disposición de las combinaciones de valores resultan realmente útiles para la simplificación.

Para emplear los mapas de Karnaugh, primero ponemos la función en forma de minterms y dibujamos el mapa correspondiente de las variables que tenga la función.

Vamos poniendo un 1 en las celdas del mapa de Karnaugh que correspondan con las coordenadas de los minterms.

Una vez puestos todos los unos, hacemos con ellos agrupaciones de potencias de dos de los términos adyacentes. Se debe hacer el menor número de agrupaciones con el mayor número de unos posibles. Las agrupaciones pueden superponerse.

Ahora cogemos las variables que presentan el mismo valor para cada agrupación realizada y expresamos la función como suma de productos.

Vamos a ir viendo el método de Karnaugh con distinto número de variables y haremos algunos ejercicios para que se pueda ver con claridad el procedimiento.

1. Karnaugh para dos variables

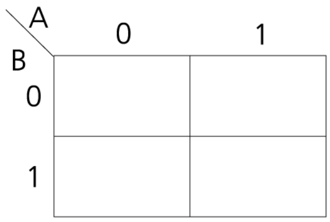


Tabla 3
Mapa de Karnaugh para dos variables.

El mapa de Karnaugh debe recoger las cuatro posibles combinaciones de las dos variables. Como ves en la figura 3, tenemos cuatro celdas.

Si la función es:

$$F_1 = A \cdot B + \overline{A} \cdot B$$

La función está en forma de minterms y vemos que para el término $A \cdot B$ tenemos que poner un 1 en la celda que corresponde a las coordenadas 11.

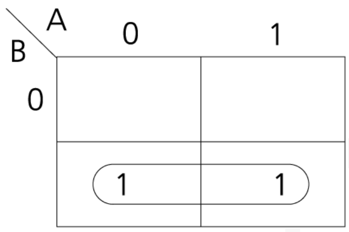


Tabla 4
Mapa de Karnaugh para la función F_1.

Asimismo, para la combinación $\overline{A} \cdot B$ ponemos un 1 en la celda de coordenadas 01.

Una vez puestos todos los unos, hacemos con ellos agrupaciones de potencias de dos. Por tanto, el Mapa de Karnaugh ahora nos queda como en la figura 4:

Cogemos las variables que presentan el mismo valor para cada agrupación realizada, con lo cual la función es:

$$F_1 = B$$

FONDO FORMACION

2. Karnaugh para tres variables

El mapa de Karnaugh debe recoger las ocho posibles combinaciones de las tres variables. Tenemos así ocho celdas, como ves en la figura 5.

C \ AB	00	01	11	10
0				
1				

Tabla 5: Mapa de Karnaugh para tres variables.

Si la función es:

$$F_2 = A \cdot B \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}$$

Para el término $A \cdot B \cdot C$ ponemos un 1 en la celda de coordenadas 111.
Para el término $\overline{A} \cdot B \cdot C$ ponemos un 1 en la celda de coordenadas 011.
Para el término $\overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}$ ponemos un 1 en la celda de coordenadas 010.

C \ AB	00	01	11	10
0		1		
1		1	1	

Tabla 6: Mapa de Karnaugh para la función F_2.

El valor de la función entonces es:

$$F_2 = B \cdot \overline{A} + C \cdot A$$

$$F_2 = B \cdot (\overline{A} + C)$$

3. Karnaugh para cuatro variables

El mapa de Karnaugh debe recoger las dieciséis posibles combinaciones de las cuatro variables. Tenemos así, dieciséis celdas, como ves en la figura 3.

CD \ AB	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Tabla 7: Mapa de Karnaugh para cuatro variables.

Si la función es:

$$F_3 = \overline{D} \cdot \overline{C} \cdot \overline{B} \cdot \overline{A} + \overline{D} \cdot \overline{C} \cdot B \cdot \overline{A} + D \cdot \overline{C} \cdot \overline{B} \cdot \overline{A} +$$

$$+ D \cdot \overline{C} \cdot B \cdot \overline{A} + \overline{D} \cdot C \cdot B \cdot A + \overline{D} \cdot C \cdot \overline{B} \cdot A$$

Para el término $\overline{D} \cdot \overline{C} \cdot \overline{B} \cdot \overline{A}$ ponemos un 1 en la celda 0000.
Para el término $\overline{D} \cdot \overline{C} \cdot B \cdot \overline{A}$ ponemos un 1 en la celda 0010.
Para el término $D \cdot \overline{C} \cdot \overline{B} \cdot \overline{A}$ ponemos un 1 en la celda 1000.
Para el término $D \cdot \overline{C} \cdot B \cdot \overline{A}$ ponemos un 1 en la celda 1010.
Para el término $\overline{D} \cdot C \cdot B \cdot A$ ponemos un 1 en la celda 0111.
Para el término $\overline{D} \cdot C \cdot \overline{B} \cdot A$ ponemos un 1 en la celda 0101.

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1		
01	1	1		
11				
10			1	1

Tabla 8: Mapa de Karnaugh para la función F_3.

El valor de la función entonces es:

$$F_3 = \overline{C} \cdot \overline{A} + \overline{D} \cdot C \cdot A$$

Si consideras que has concluido el estudio de esta unidad, intenta responder a las siguientes cuestiones de autoevaluación.

FONDO FORMACION

Cuestiones de autoevaluación

1 Simplifica la siguiente función por el método de Karnaugh:

$$F = C \cdot B \cdot A + \overline{C} \cdot \overline{B} \cdot A + C \cdot \overline{B} \cdot A$$

2 Simplifica la siguiente función por el método de Karnaugh:

$$F = \overline{C} \cdot \overline{B} \cdot \overline{A} + \overline{C} \cdot B \cdot \overline{A} + C \cdot B \cdot A + C \cdot B \cdot \overline{A}$$

ACTIVIDAD 1

$F = A \cdot B \cdot C + A \cdot B + \overline{A} \cdot B \cdot C + B \cdot C$

Aplicando las propiedades del álgebra de Boole tenemos:

$F = A \cdot B \cdot (C + 1) + B \cdot C \cdot (\overline{A} + 1)$

$F = A \cdot B + B \cdot C$

$F = B \cdot (A + C)$

ACTIVIDAD 2

La función en forma de minterms será:

$F = \overline{C} \cdot \overline{B} \cdot \overline{A} + \overline{C} \cdot B \cdot \overline{A} + \overline{C} \cdot B \cdot A + C \cdot \overline{B} \cdot \overline{A} + C \cdot B \cdot \overline{A} + C \cdot B \cdot A$

Aplicando las propiedades del álgebra de Boole tenemos:

$$F = \overline{C} \cdot \overline{A} + B \cdot A + C \cdot \overline{A}$$

$$F = \overline{A} + B \cdot A$$

$$F = \overline{A} + B \cdot A + \overline{A}$$

$$F = \overline{A} + B \cdot A + \overline{A} \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$$

$$F = \overline{A} + B + \overline{A} \cdot \overline{B}$$

$$F = \overline{A} + B$$

Respuestas a las cuestiones de evaluación

1

$$F = C \cdot B \cdot A + \overline{C} \cdot \overline{B} \cdot A + C \cdot \overline{B} \cdot A$$

C \ AB	00	01	11	10
0				1
1			1	1

$$F = C \cdot A + \overline{B} \cdot A$$

$$F = A \cdot (\overline{B} + C)$$

2

$$F = \overline{C} \cdot \overline{B} \cdot \overline{A} + \overline{C} \cdot B \cdot \overline{A} + C \cdot B \cdot A + C \cdot B \cdot \overline{A}$$

C \ AB	00	01	11	10
0	1	1		
1		1	1	

$$F = \overline{C} \cdot \overline{A} + C \cdot B$$

FONDO FORMACION

Resumen de Unidad

Álgebra de Boole Nos permite estudiar las funciones lógicas y su simplificación para después implementarlas electrónicamente. Presenta dos operaciones básicas que son la **suma lógica** y el **producto lógico.**

Propiedades El ágebra de Boole cumple además las propiedades siguientes: conmutativa, asociativa, distributiva, elemento neutro y elemento inverso.

Función lógica Representa la correspondencia entre las variables de entrada y la salida de un circuito. Es importante la simplificación de funciones, ya que la expresión más simple nos llevará a un circuito más sencillo.

Para simplificar funciones es conveniente conocer las propiedades, equivalencias y teoremas del álgebra de Boole.

Térmico canónico Es todo producto o suma en el cual aparecen todas las variables de la función en forma directa o complementada.

A los términos producto se les llama **minterms** y a los términos suma **maxterms.** Decimos que una función se encuentra en forma canónica cuando está expresada como suma de productos canónicos o como producto de sumas canónicas.

Tabla de verdad Es una forma de representación de funciones en la que se indica el valor que toma la función para cada una de las combinaciones de valores de las variables.

Mapas de Karnaugh Es un método sistemático para simplificar funciones.

FONDO FORMACION

Notas

Vocabulario

Combinacional: se llama circuito combinacional a aquél cuya salida en un instante dado, sólo depende de las entradas aplicadas en ese momento.

Función booleana: una función *booleana* es una función lógica que cumple las propiedades y teoremas del álgebra de Boole.

FONDO FORMACION

BVQi

ISO 9001

ACREDITADO POR ENAC

FONDO FORMACION